



**Fundusze  
Europejskie**  
Polska Cyfrowa



**Politechnika Wrocławska**

**Unia Europejska**  
Europejski Fundusz  
Rozwoju Regionalnego



*Aktywna Platforma Informacyjna e-scienceplus.pl POPC.02.03.01-00-0010/16-00*

# **PODSTAWY DYNAMIKI BUDOWLI**

materiały dydaktyczne

dla studentów Politechniki Wrocławskiej Wydziału Budownictwa Lądowego i Wodnego

Opracowała dr inż. Monika Podwórna

Wrocław, czerwiec 2017 r

## PDB - SPIS TREŚCI

|                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------|----|
| PDB - spis treści .....                                          | 2  |
| 1. Wprowadzenie. ....                                            | 3  |
| 2. Drgania. ....                                                 | 7  |
| 3. Ruchy harmoniczne, quasi-harmoniczne. ....                    | 11 |
| 3.1. Ruch harmoniczny .....                                      | 11 |
| 3.2. Ruch quasi-harmoniczny z modulacją częstości .....          | 15 |
| 4. Składanie ruchów harmoniczny.....                             | 16 |
| 4.1. Składanie ruchów harmoniczny współliniowych .....           | 16 |
| 4.2. Składanie ruchów harmoniczny nie współliniowych .....       | 21 |
| 5. Schemat dynamiczny. ....                                      | 24 |
| 6. Więzy odkształcalne. ....                                     | 27 |
| 6.1. Izolowana więź sprężysta .....                              | 27 |
| 6.2. Izolowana więź tłumiąca .....                               | 31 |
| 7. Podstawowe prawa dynamiki. ....                               | 32 |
| 8. Układy o jednym stopniu swobody. ....                         | 36 |
| 8.1. Modelowanie układów o jednym stopniu swobody. ....          | 36 |
| 8.2. Zagadnienie własne. ....                                    | 39 |
| 8.3. Drgania swobodne.....                                       | 43 |
| 8.3.1. Drgania swobodne nietłumione. ....                        | 43 |
| 8.3.2. Drgania swobodne tłumione. ....                           | 44 |
| 8.4. Drgania wymuszone. ....                                     | 50 |
| 8.4.1. Drgania układu nietłumionego wymuszone harmonicznie. .... | 51 |
| 8.4.2. Drgania układu tłumionego wymuszone harmonicznie. ....    | 54 |
| 9. Ocena szkodliwości drgań. ....                                | 58 |
| 9.1. Wpływ drań na konstrukcję.....                              | 58 |
| 9.2. Wpływ drań na człowieka.....                                | 61 |

## 1. Wprowadzenie.

**Dynamika** jest działem mechaniki zajmującym się ruchem układów materialnych z uwzględnieniem przyczyn tego ruchu. W czasie ruchu układów materialnych oprócz sił ciężkości pojawiają się nowe siły masowe i oporu ruchu.

*„Dynamika budowli zajmuje się obliczaniem konstrukcji budowlanych poddanych obciążeniom zmiennym w czasie” Witold Nowacki „Dynamika budowli” Arkady 1971*

**Dynamika budowli** dotyczy, podobnie jak statyka budowli, takich układów, które mogą być **ustrojami budowlanymi**, czyli geometrycznie niezmiennymi o zachowawczej postaci równowagi.

Ruch takich układów ma zwykle charakter oscylacyjny wokół położenia równowagi statycznej. W stanie równowagi statycznej układ jest poddany działaniu sił zachowawczych (siły ciężkości, statyczne parcie wiatru, ...). Całkowita energia nie-mechaniczna jest energią potencjalną równą pracy tych sił. Cechą charakterystyczną zagadnień dynamicznych jest ruch, stąd przedmiotem badań jest **ruch** czyli zmienność w czasie odpowiedzi konstrukcji.

W trakcie ruchu pojawiają się dodatkowe siły:

- ✓ siły masowe (bezwładności)
- ✓ opory ruchu (tłumienie).

W bilansie energii trzeba uwzględniać, oprócz energii potencjalnej, energię kinetyczną związaną z ruchem mas układu oraz energię zużytą (rozproszoną) na pokonanie oporów ruchu.

Wiele konstrukcji inżynierskich, a także urządzeń mechanicznych poddanych jest działaniu obciążeń zmiennych w czasie, które mogą wywołać drgania konstrukcji.

Ograniczając się tylko do przykładów konstrukcji inżynierskich, można wymieniać drgania występujące

- w mostach poddanych działaniu przejeżdżających pojazdów,
- w kładkach wywołane przemieszczaniem się pieszych,
- w smukłych budowlach narażonych na działanie wiatru,
- w budowlach obciążonych sejsmicznie,
- w fundamentach pod maszyny,
- itd.

Zadanie inżyniera jest tak zaprojektować i wykonać konstrukcję aby m. in. wpływy dynamiczne były ograniczone i niewielkie.

Szczególnie narażone na wpływy dynamiczne są:

- ✓ obiekty mostowe
- ✓ konstrukcje wsporcze pod maszyny
- ✓ budowle wysokie
- ✓ płyty lotniskowe
- ✓ wieże wiertnicze
- ✓ platformy wiertnicze
- ✓ obiekty w terenach sejsmicznych.

Przykładowa zarejestrowana katastrofa budowlana spowodowana nieprawidłowego uwzględnienia wpływów dynamicznych:

**Katastrofa mostu w Tacoma** – katastrofa budowlana, która miała miejsce 7 listopada 1940 w mieście Tacoma w północno-zachodniej części Stanów Zjednoczonych Ameryki. Katastrofa ta stanowi przykład znaczenia wpływu parcia wiatru na konstrukcję jako oddziaływania dynamicznego, które należy uwzględnić podczas projektowania konstrukcji tego typu.



<https://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs>

[https://pl.wikipedia.org/wiki/Katastrofa\\_mostu\\_Tacoma](https://pl.wikipedia.org/wiki/Katastrofa_mostu_Tacoma)

Podstawy dynamiki zostały opracowane przez:



***Galileo Galilei (Galileusza)***

odkrył m.in. zjawisko bezwładności

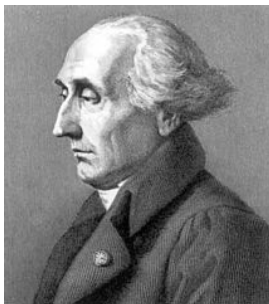
<https://pl.wikipedia.org/wiki/Galileusz>



***Issac Newton'a***

sformułował m.in. prawa mechaniki

[https://pl.wikipedia.org/wiki/Isaac\\_Newton](https://pl.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton)



***Joseph Louis Langrange'a***

sformułował m.in. matematyczne prawa mechaniki

[https://pl.wikipedia.org/wiki/Joseph\\_Louis\\_Lagrange](https://pl.wikipedia.org/wiki/Joseph_Louis_Lagrange)



***Jean Le Rond d'Alembert'a***

zasada, którą sformułował jest podstawą metody kinetostatycznej, stosowanej powszechnie w dynamice

[https://pl.wikipedia.org/wiki/Jean\\_le\\_Rond\\_d%E2%80%99Alembert](https://pl.wikipedia.org/wiki/Jean_le_Rond_d%E2%80%99Alembert)

Aby dobrze zrozumieć zagadnienia dynamiki budowli, należałoby wyjaśnić kilka pojęć:

➡ „Leksykon naukowo-techniczny” WNT Warszawa 1984r:

**Punkt materialny** – obiekt o nieskończenie małych wymiarach i skończonej masie, którego położenie można określać jak położenie punktu geometrycznego

**Ciało materialne** lub **układ materialny** – każdy układ ciał, który można rozpatrywać jako układ punktów materialnych.

Np. belka jest traktowana jako zbiór punktów materialnych i ma nieskończenie wiele stopni swobody dynamicznej. Należy przez to rozumieć, że każdy z punktów belki ugina się inaczej. Możemy w tym przypadku posłużyć się aproksymacją sprowadzając opis belki do dwóch końcowych jej punktów.

**Sila** – jakakolwiek przyczyna fizyczna zdolna do zmiany warunków ruchu lub spoczynku ciała materialnego albo do jego odkształcenia

Sila jest wielkością kierunkową, czyli wektorem liniowym.

**Masa** – to pewna wielkość, charakteryzująca zachowanie się dynamiczne ciała, niezależna ani od stanu ruchu, ani też od stanu fizycznego ciała.

Masa jest wielkością bezkierunkową, czyli skalarem.

Pozostałe pojęcia będą wyjaśniane na bieżąco.

➡ „Leksykon naukowo-techniczny” WNT Warszawa 1984r:

## 2. Drgania.

**Drgania, oscylacje, wibracje** – zjawisko, w którym pewne wielkości charakterystyczne (np. przemieszczenia) są funkcjami czasu, zazwyczaj na przemian rosnącymi i malejącymi w następujących po sobie kolejno przedziałach czasu

➡ „Leksykon naukowo-techniczny” WNT Warszawa 1984r:

Wielkość zmienia swą wartość rosnąc i malejąc na przemian - na przemian zbliżają się lub oddalają od pewnej przeciętnej wartości

1. wartość przeciętna może być ustalona w czasie

Wtedy przyjmujemy ją zwykle za wartość zerową w danym układzie współrzędnych (równowaga statyczna)

2. wartość przeciętna może być zmienna w czasie w dowolny sposób

Drgania mogą powodować niewłaściwą pracę (wynika to z ich powtarzalności – wywołują powstawanie zmiennego obciążenie):

- konstrukcji
- maszyn
- mogą mieć ujemny wpływ na organizm ludzki

### Przyczyny drgań

Drgania konstrukcji budowlanych mogą być wywołane pracą różnych maszyn i urządzeń, poruszającymi się pojazdami jak samochody lub pociągi (ruchem drogowym lub kolejowym), siłami natury jak działanie wiatru, wstrząsy sejsmiczne (tektoniczne) i górnicze, itp.

### Skutki drgań

Skutkami drgań są :

- dodatkowe naprężenia wynikające z działania sił bezwładności,
- dodatkowe przemieszczenia i odkształcenia,
- zmęczenie materiału powodujące obniżenie nośności elementów konstrukcji, powstanie rys zmęczeniowych, pęknięć.
- uciążliwość dla ludzi mieszkających lub pracujących w danym obiekcie.

**Klasyfikacja drgań:**1. ze względu na cykliczność:

- o okresowe (periodyczne)

powtarzają się w równych odstępach czasu.

Szczególnym przypadkiem jest ruch harmoniczny, powstający pod wpływem siły działającej przeciwnie do wychylenia ciała od położenia równowagi, o wartości proporcjonalnej do wychylenia. Wykres zależności położenia od czasu jest dla takiego ruchu sinusoidą

- o nieokresowe (nieperiodyczne)

powtarzają się w nierównych odstępach czasu. Szczególnym przypadkiem drgań są tu drgania prawie okresowe (quasi-harmoniczne)

2. ze względu na działanie sił zewnętrznych na układ drgający:

- o swobodne,

występują, gdy na układ nie działa żadna zmienna siła zewnętrzna, która wpływa na proces drgań. Stała siła o niewielkiej wartości lub działająca w układzie liniowym nie wpływa na drgania ciała, jedynie przesunęła położenie równowagi. ***Układ taki jest zachowawczy***, tzn. energia drgań nie zmienia się,

- o nieswobodne,

występują, gdy na układ działa zmienna siła zewnętrzna

**Drgania nieswobodne, wymuszone** – powstają pod wpływem siły zewnętrznej, okresowo zmiennej. Mogą prowadzić do wielkiego wzrostu amplitudy drgań, a nawet do zniszczenia układu, gdy częstotliwość siły wymuszającej jest bliska lub równa częstotliwości drgań własnych układu – powstaje tzw. **rezonans drgań**.

**Drgania nieswobodne, tłumione** – powstają np. pod wpływem sił tarcia (np. gdy siła jest proporcjonalna do prędkości ciała i przeciwnie skierowana) – wtedy energia drgań zmniejsza się, zamieniając się w energię ciepłą; tłumienie drgań układu powstaje też, gdy oddziałuje on na inny układ, oddając mu część lub całość swojej energii, np. w zjawisku rezonansu.

**Drgania samowzbudne** powstają, gdy energia drgań rośnie lub jest podtrzymywana na stałym poziomie kosztem energii, dostarczanej do układu, pomimo występowania tłumienia

3. ze względu na liniowość:

- o liniowe,
- o nieliniowe,

opisane równaniami różniczkowymi nieliniowymi

4. ze względu na występowanie tłumienia:

- o nietłumione,
- o tłumione,

uwzględnione jest tłumienie drgań

**Tłumienie drgań** – zmniejszanie się amplitudy drgań swobodnych w układzie drgającym wskutek rozpraszania się (dyssypacji) ich energii

5. ze względu na możliwość określenia przebiegu funkcji na podstawie jej wartości w pewnym momencie:

- o deterministyczne,
- o stochastyczne (niedeterministyczne, losowe),

uwzględnia się fakt, że rzeczywiste obciążenia, a stąd wywołane przez nie drgania, często mają charakter nieregularny, przypadkowy - losowy

**Wyróżniamy drgania:**

- periodyczne (okresowe)
- nieperiodyczne (nieokresowe)

Periodyczny, okresowy – powtarzający się w określonych przedziałach czasu

Drgania okresowe (periodyczne) - drgania opisane funkcją  $x(t)$ , jeśli

$$x(t + T) = x(t)$$

Dla wszystkich wartości  $t$  i pewnych  $T \neq 0$ .

Najmniejszą wartość  $T$ , dla której zachodzi równość nazywamy **okresem drgań**.

**Cykle drgań** nazywamy część drgań okresowych powtarzających się co okres  $T$ .

Wielkość

$$f = \frac{1}{T}$$

nazywamy **częstotliwością (częstością) drgań**. Przedstawia ona liczbę cykli drgań zachodzących w ciągu jednej sekundy. Jednostką częstotliwości jest herc [Hz], przy czym:

$$1\text{Hz} = 1 \frac{\text{cykl}}{\text{sek}}$$

Szczególnym przypadkiem drgań okresowych są **drgania harmoniczne** określone wzorem:

$$x(t) = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

gdzie:

$a$  - jest amplitudą drgań harmoniczných [m],

$\omega t + \varphi$  - jest fazą drgań harmoniczných,

$\varphi$  - jest faza początkową, zwana także kątem przesunięcia fazowego [rad],

$\omega$  - jest częstością (częstość kątowną) [rad/s],  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Oprócz częstości kątownej (kołowej)  $\omega$  w praktyce używa się wielkości:

$f = \frac{1}{T}$  – częstość fizyczna, częstość [c/s=Hz]

$n = \frac{60}{T}$  – częstość techniczna [c/min]

gdzie,  $c$  – ilość cykli [obr/min]

W szczególności rozpatruje się

drgania harmoniczne,

drgania wywołane pojedynczym impulsem,

drgania wywołane serią impulsów,

drgania wywołane ruchomym obciążeniem inercyjnym,

drgania wywołane ruchomym obciążeniem nieinercyjnym,

drgania nieregularne (drgania stochastyczne) stacjonarne,

drgania nieregularne (drgania stochastyczne) niestacjonarne.

**Analiza drgań układu materialnego** polega najczęściej na badaniu rozwiązań różniczkowego równania równowagi, opiera się ona najczęściej na badaniu rozwiązań przybliżonych. Można też korzystać z analizy jakościowej równań różniczkowych pozwalającej na ocenę niektórych właściwości ruchu bez znajomości rozwiązania równania ruchu. (zob. np. Minorsky „Drgania nieliniowe” PWN 1967).

Według Osińskiego stosuje się następujące grupy metod w analizie drgań:

- o analiza rozwiązań ścisłych (zob. np. wykorzystanie transformacji Laplace’a lub rachunku operatorowego)
- o metody topologiczne (zob. analiza przebiegu trajektorii fazowych)
- o przybliżone metody oparte na właściwościach płaszczyzny fazowej (zob. metody perturbacyjne lub metody wariacyjne np. Ritza, Galerkina)
- o metody analogowe (modelowanie układu mechanicznego za pomocą układu elektrycznego odtworzonego w maszynie analogowej)
- o metody numeryczne (najczęściej obecnie wykorzystywane dzięki komputerom, np. metoda Runge-Kutta, metody Newmarka)
- o metody doświadczalne (badanie drgań rzeczywistych obiektów)

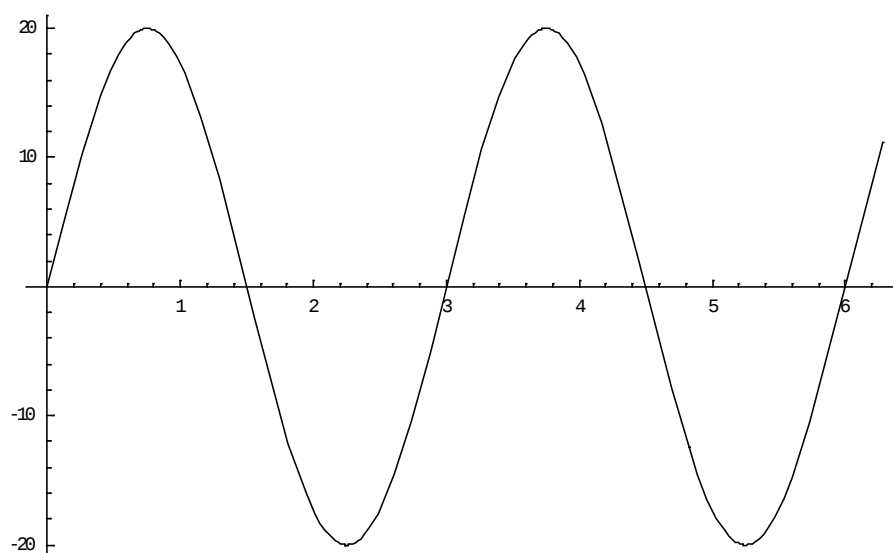
### 3. Ruchy harmoniczne, quasi-harmoniczne.

#### 3.1. Ruch harmoniczny

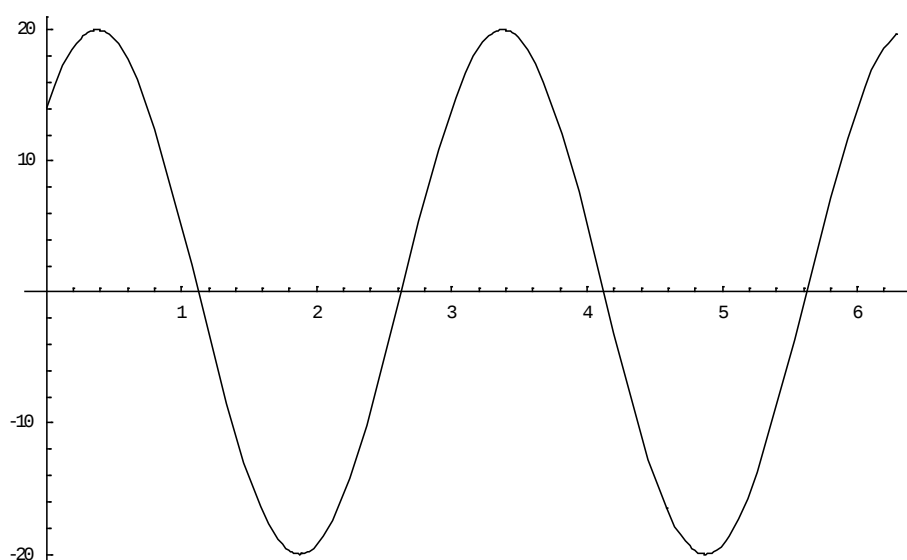
Przykład drgań harmoniczných:

$$q(t) = a \sin(2\pi \frac{t}{T} + \varphi)$$

faza początkowa  $\varphi = 0$



faza początkowa  $\varphi = \pi / 4$



**drgania harmoniczne**  $X(t) = q(t) = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

$$q(t) = q(t + nT) = a \cdot \sin(2\pi t/T + \varphi)$$

gdzie

$q(t)$  – współrzędna ruchu drgającego

(np. przemieszczenie, kąt skręcenia lub inna wielkość)

$a = \text{am } q$  – **amplituda** [m]

największe odchylenie wartości chwilowej wielkości określonej od jej wartości średniej

$T$  – okres drgań [s] (odwrotność częstotliwości)

$\omega = 2\pi/T$  – częstość kołowa, prędkość kołowa [rad/s]

$\omega t + \varphi$  – faza ruchu [rad]

$\varphi$  – faza początkowa [rad]

Czasami zapis ruchu rozpatrywany jest za pomocą **obrazu fazowego** (bez rozwinięcia czasowego). Dla ruchu harmonicznego prostego obraz tego ruchu przedstawia koło. Można powiedzieć, że ruch jest określony jeśli znany jest obraz fazowy. Dla ruchów periodycznych (okresowych) obraz fazowy jest krzywą zamkniętą.

Klasyczna formuła wzoru opisująca ruch harmoniczny :

$$q(t) = a \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{nosi nazwę zapisu zwiniętego.}$$

Można również zapisać w formie rozwiniętej:

$$q(t) = q_s \sin \omega t + q_c \cos \omega t$$

gdzie  $q_s = a \cos \varphi$  – składowa sinusowa amplitudy ruchu

$q_c = a \sin \varphi$  – składowa cosinusowa amplitudy ruchu

Powrót do zapisu zwiniętego:

$$a = \sqrt{q_s^2 + q_c^2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{q_c}{q_s}$$

*przemieszczenie*

$$q(t) = a \sin(\omega t + \varphi) =$$

$$= a \cos \varphi \sin \omega t + a \sin \varphi \cos \omega t = q_s \sin \omega t + q_c \cos \omega t$$

*predkosc ruchu (pochodna kinematyczna)*

$$\dot{q}(t) = \frac{dq}{dt} = a\omega \cos(\omega t + \varphi) =$$

$$= a\omega \cos \varphi \cos \omega t - a\omega \sin \varphi \sin \omega t = -q_c \omega \sin \omega t + q_s \omega \cos \omega t$$

*przyspieszenie ruchu*

$$\ddot{q}(t) = \frac{d^2 q}{dt^2} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) =$$

$$= -a\omega^2 \cos \varphi \sin \omega t - a\omega^2 \sin \varphi \cos \omega t = -q_s \omega^2 \sin \omega t - q_c \omega^2 \cos \omega t =$$

$$= -\omega^2 q(t)$$

### 3.2. Ruch quasi-harmoniczny z modulacją amplitudy

jest to ruch opisany wzorem :

$$q(t) = a(t) \cdot \sin(\omega t + \varphi) = q_s(t) \sin \omega t + q_c(t) \sin \omega t, \quad \text{gdzie} \quad a(t) > 0$$

Funkcję  $a(t)$  można zapisać  $a(t) = a\mu(t)$

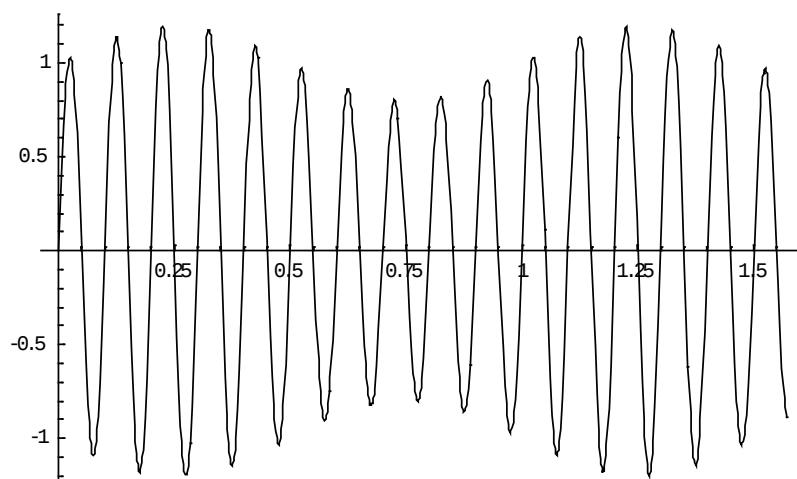
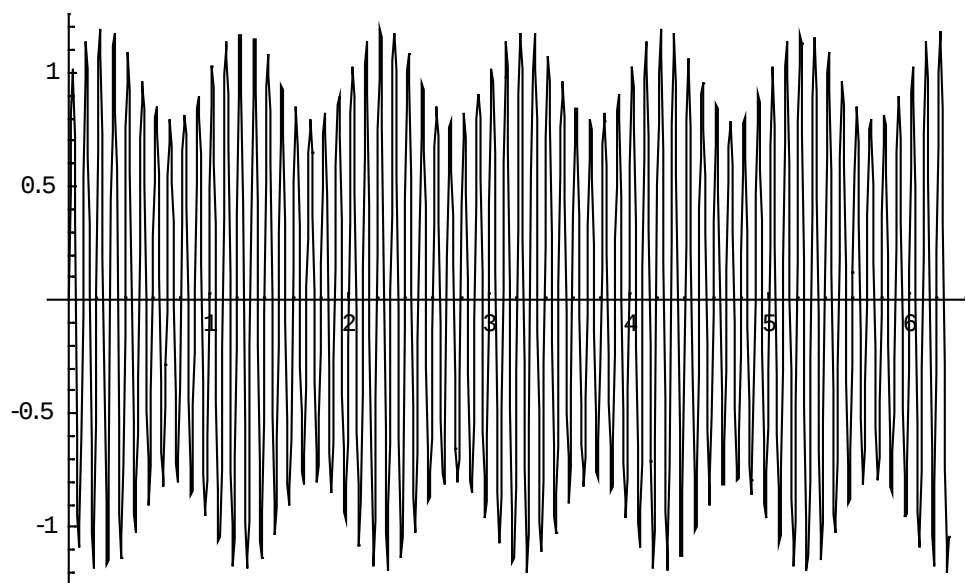
gdzie  $\mu(t)$  jest funkcją modulacji amplitudy.

$$q(t) = a(t) \sin(\omega t + \varphi)$$

faza początkowa  $\varphi = 0$

$$\omega = 20\pi \Rightarrow t = \pi / 10$$

$$a(t) = 0,2 \sin(2\pi t) + 1$$

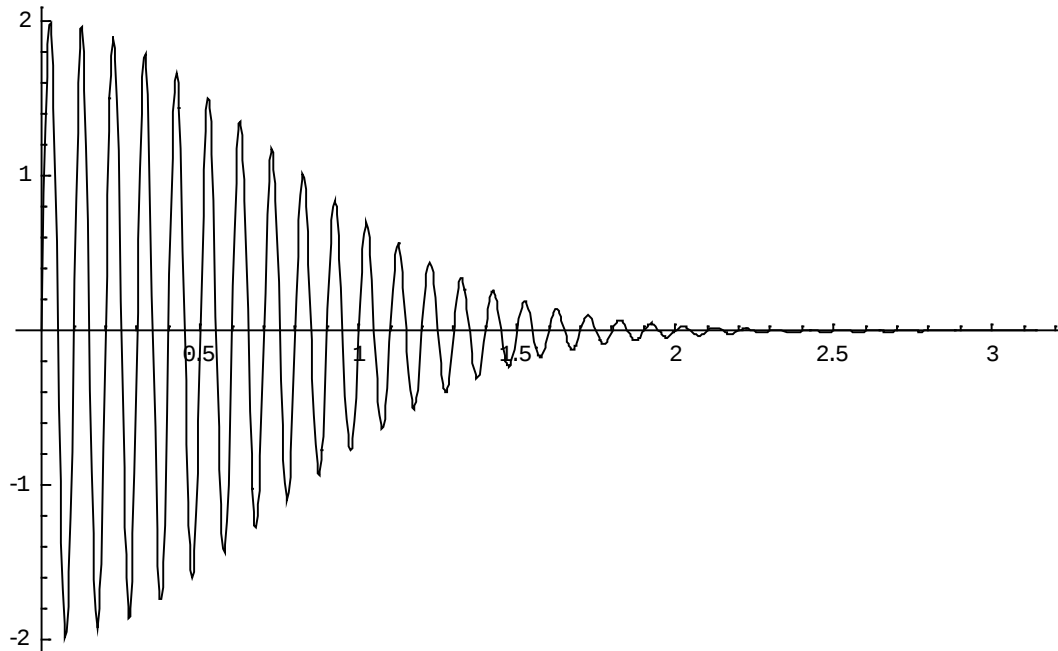


$$q(t) = a(t) \sin(\omega t + \varphi)$$

faza początkowa  $\varphi = 0$

$$\omega = 20\pi \Rightarrow t = \pi / 10$$

$$a(t) = \frac{2}{e^{t^2}}$$

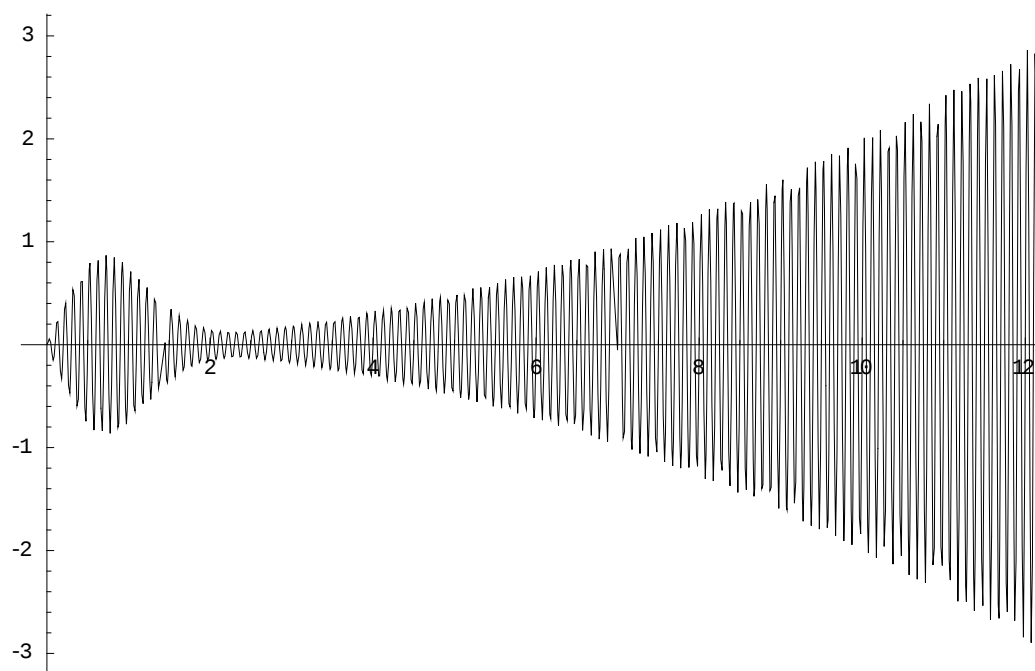


$$q(t) = a(t) \sin(\omega t + \varphi)$$

faza początkowa  $\varphi = 0$

$$\omega = 2\pi / 3$$

$$a(t) = 2(e^{-t^2} + 0,01t)t$$

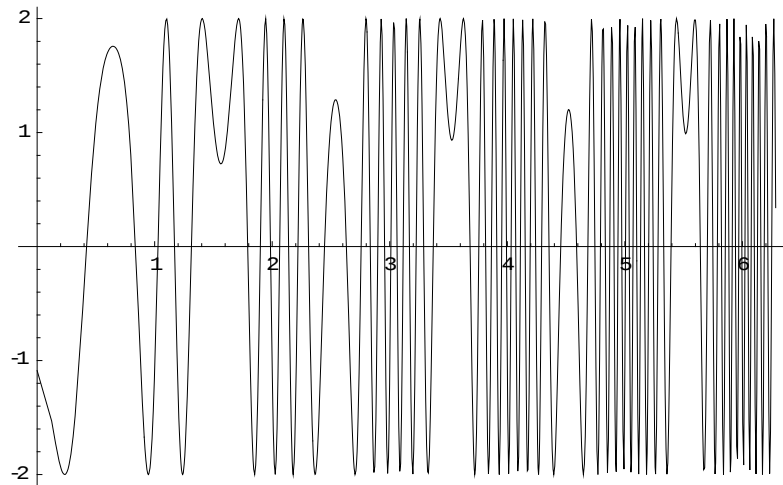


### 3.2. Ruch quasi-harmoniczny z modulacją częstotliwości

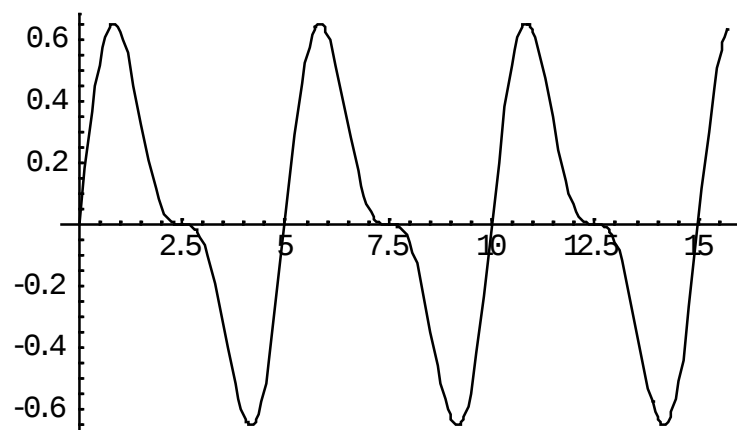
$$q(t) = a \sin(\omega(t)t + \varphi)$$

faza początkowa  $\varphi = 10$

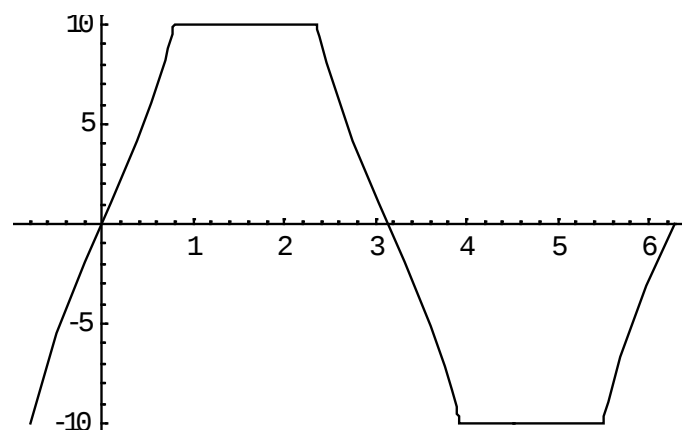
$$\omega(t) = 2\pi \sin(\pi t)$$



$$q(t) = \frac{1 + \cos \omega t}{2} \sin \omega t$$



$$q(t) = a \tan t$$



## 4. Składanie ruchów harmoniczny

### 4.1. Składanie ruchów harmoniczny współliniowych

Rozważmy ruch punktu opisany funkcją  $q(t)$ , która jest kombinacją (sumą) *współliniowych ruchów harmoniczných*:

$$q_j(t) = a_j(t) \cdot \sin(\omega_j t + \varphi_j), \quad q(t) = q_1 + q_2 + q_3 + \dots,$$

Przypadki:

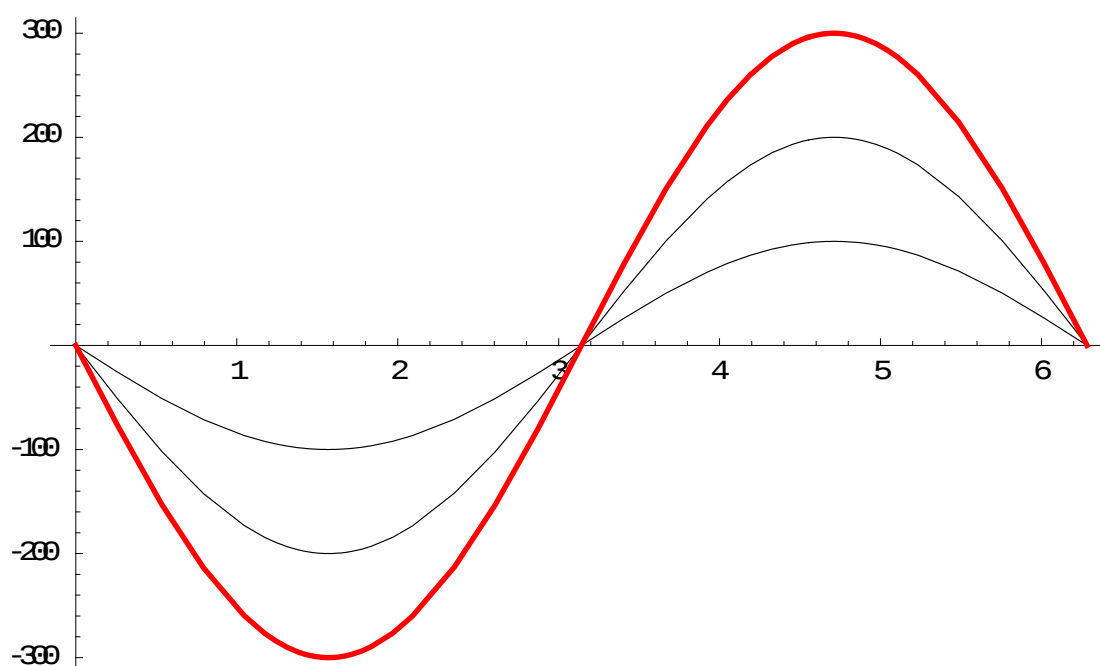
#### 1. ruchy składowe są synchroniczne

Ruch wypadkowy jest harmoniczny i synchroniczny z ruchami składowymi. Amplituda ruchu wypadkowego jest sumą amplitud składowych.  $q_j(t) = a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j)$

Częstość kołowa  $\omega_j = \omega = \text{const}$

Faza początkowa  $\varphi_j = \varphi = \text{const}$

Amplituda  $a = \sum_j a_j$



Czerwony kolor – ruch wypadkowy.

**2. ruchy składowe są przesunięte fazowo**

Ruch wypadkowy jest harmoniczny o tej samej częstotliwości (okresie) co ruchy składowe.

Częstość kołowa  $\omega_j = \omega = const$ ,

Faza początkowa  $\varphi_j \neq \varphi_i$ ,

Amplituda  $a_j \neq a_i$

Przypadki szczególne dla dwóch ruchów:

a)  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$                        $a = a_1 + a_2$

b)  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$                        $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

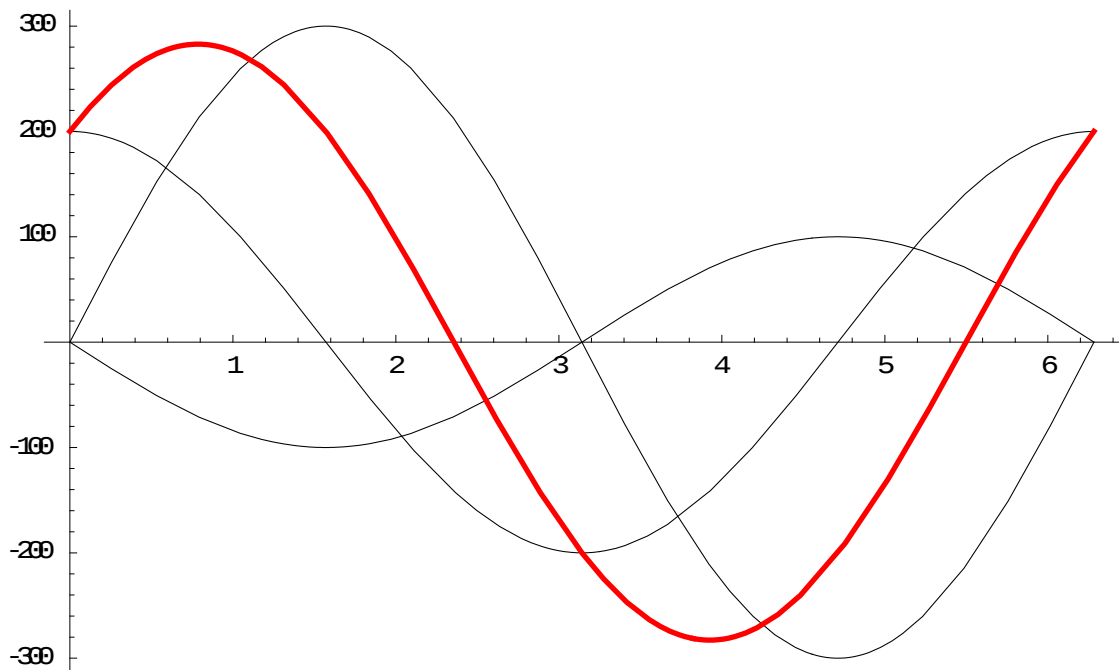
c)  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$                        $a = |a_1^2 + a_2^2|$

$$q_j(t) = a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j)$$

Przykład:

Ruchy składowe:  $\varphi_1 = \pi$ ,  $\varphi_2 = \pi/2$ ,  $\varphi_3 = 2\pi$ ,  $a_1 = 100$ ,  $a_2 = 200$ ,  $a_3 = 300$ ,

Czerwony kolor – ruch wypadkowy.



### 3. ruchy składowe są asynchroniczne

Amplituda ruchu wypadkowego jest zmienna w czasie, pulsuje w przedziale:

$$|a_1 - a_2| \leq a \leq |a_1 + a_2|$$

Jeżeli stosunki częstości są wymierne to ruch wypadkowy nie jest ruchem harmonicznym, ale jest ruchem okresowym.

$$q_j(t) = a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j)$$

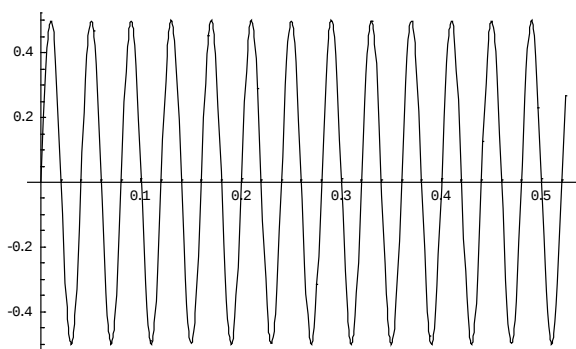
Częstość kołowa  $\omega_j \neq \omega$ ,

Faza początkowa  $\varphi_j \neq \varphi_i$ ,

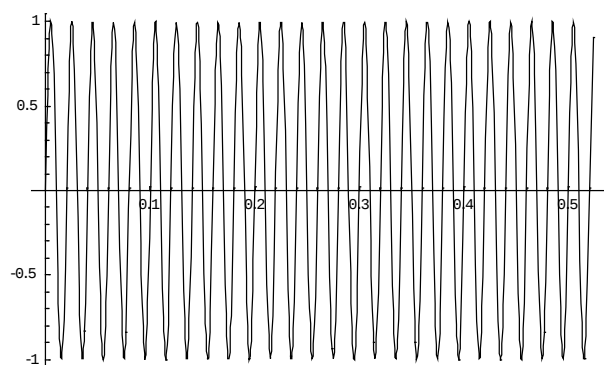
Amplituda  $a_j \neq a_i$

Przykład:

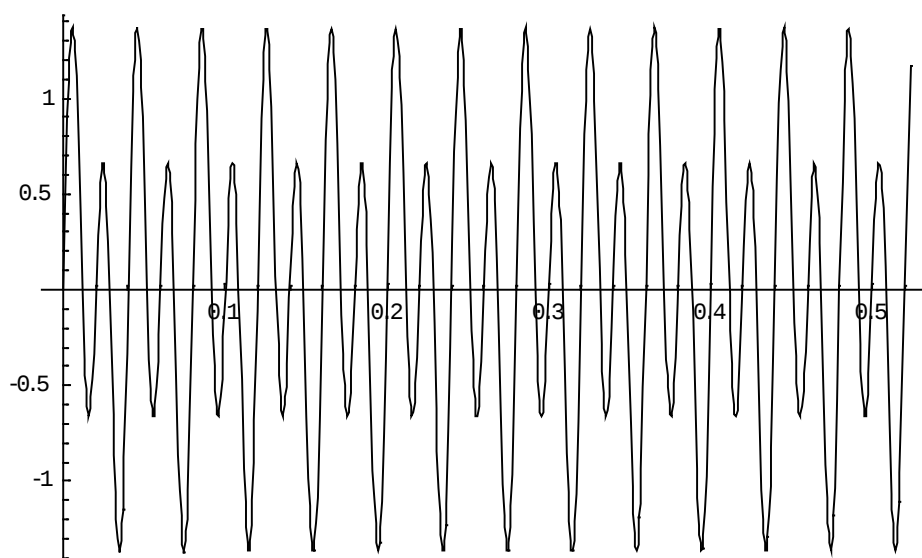
Ruchy składowe  $a_1 = 0,5$ ,  $\omega_1 = 50\pi$ ,  $\varphi_1 = 0$



$a_2 = 1$ ,  $\omega_2 = 100\pi$ ,  $\varphi_2 = 0$



Ruch wypadkowy:



Obwiednia ruchu okresowego nazywa się **majorantą ruchu**.

Jeżeli ruch wypadkowy jest ruchem okresowym, to również majoranta jest funkcją okresową, ale oba te okresy nie muszą być sobie równe.

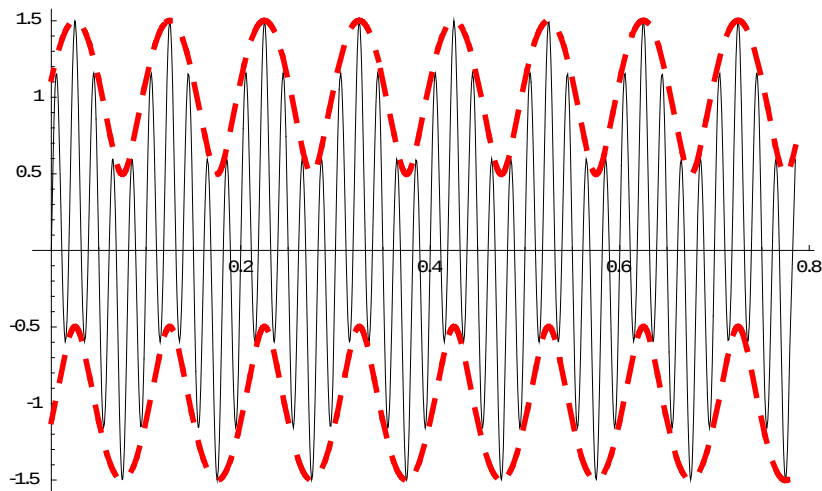
Przykłady:

#### Sinus+sinus

$$q_j(t) = a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j)$$

$$a_1 = 0,5, \quad \omega_1 = 20\pi, \quad \varphi_1 = 0$$

$$a_2 = 1, \quad \omega_2 = 100\pi, \quad \varphi_2 = 0$$

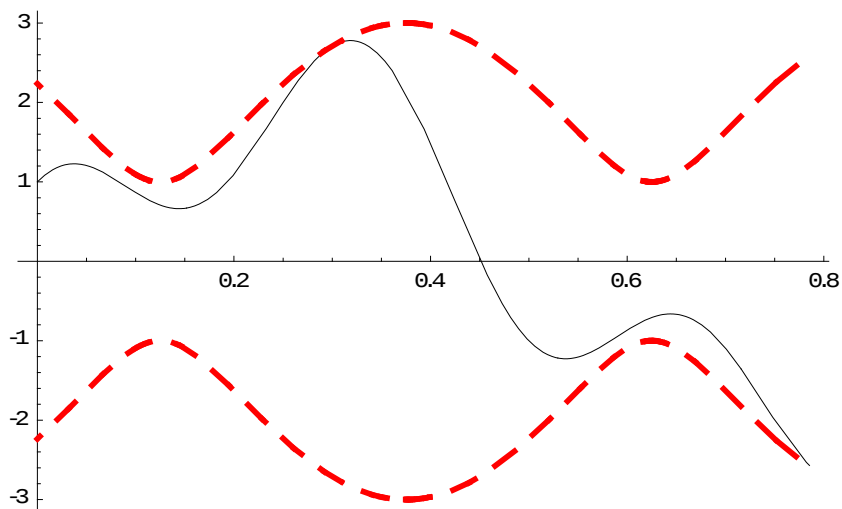


#### sinus+cosinus

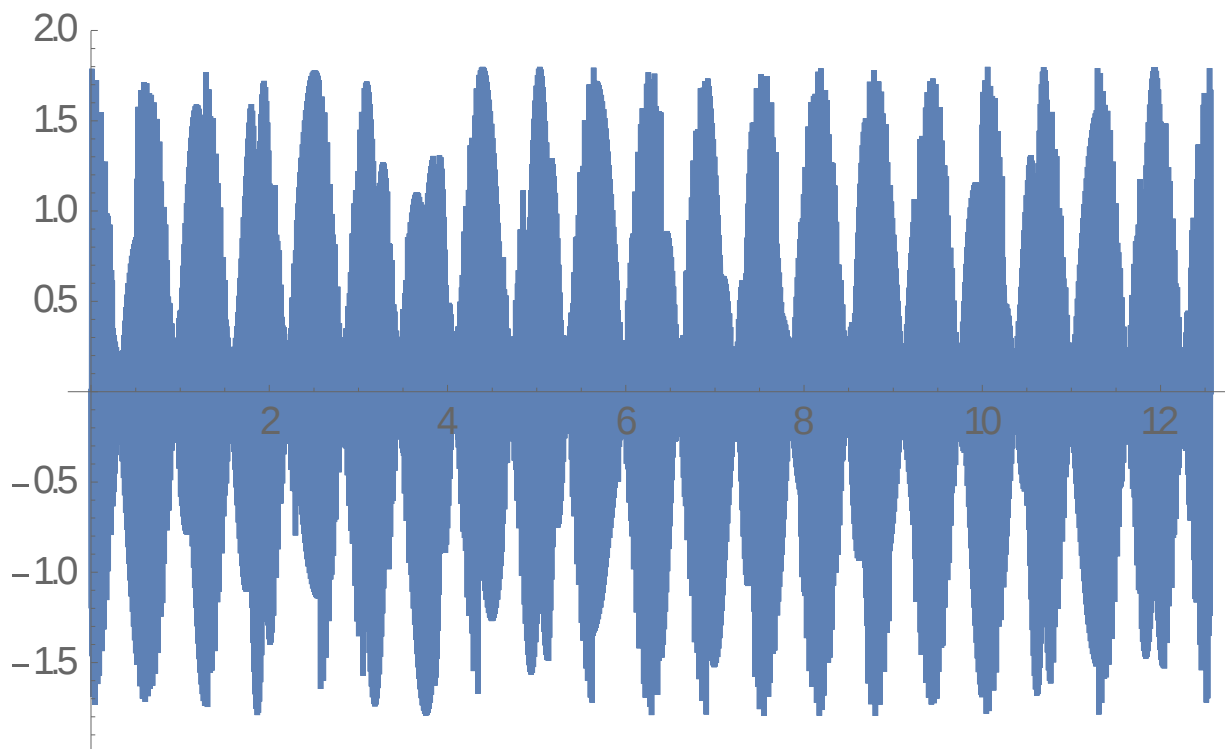
$$q_j(t) = a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j)$$

$$a_1 = 2, \quad \omega_1 = 2\pi, \quad \varphi_1 = 0$$

$$a_2 = 1, \quad \omega_2 = 6\pi, \quad \varphi_2 = \pi/2$$

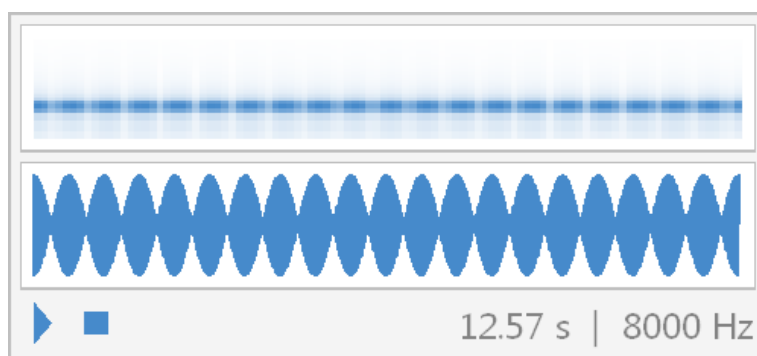


Pulsacje obwiedni są szczególnie wyraźne, gdy amplitudy i częstotliwości ruchów składowych są zbliżone, wtedy pojawia się efekt akustyczny zwany dudnieniem.



**Dudnienie** – okresowe wahanie amplitudy drgania wypadkowego zachodzące przy nakładaniu się dwóch drgań harmonicznym, których częstotliwości mało różnią się od siebie

Zjawisko to jest zauważalne szczególnie przy złożeniu dwóch dźwięków, których częstotliwości mało różnią się od siebie – obserwuje się okresowe narastanie i zanikanie dźwięku (stąd nazwa).



#### 4.2. Składanie ruchów harmoniczny nie współliniowych

Weźmy pod uwagę złożenie dwóch *nie współliniowych ruchów harmoniczných* (prostopadłych do siebie, np. dwie fale)

$$q_1(t) = X \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$q_2(t) = Y \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

1) w przypadku, gdy mamy do czynienia z *ruchami o tych samych częstościach* to trajektoria ruchu wypadkowego jest elipsa;

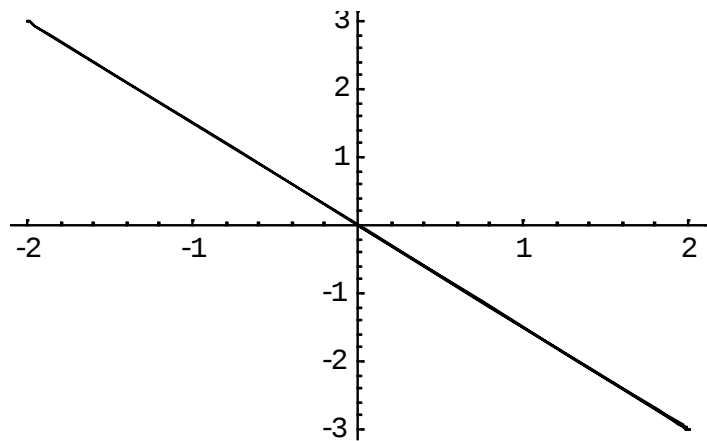
w zależności od różnicy faz otrzymamy

a)  $\varphi_1 - \varphi_2 = n\pi$  -prostą

Przykład:

$$X = 2, \quad \omega_1 = 3\pi, \quad \varphi_1 = 2\pi$$

$$Y = 3, \quad \omega_2 = 3\pi, \quad \varphi_2 = \pi$$

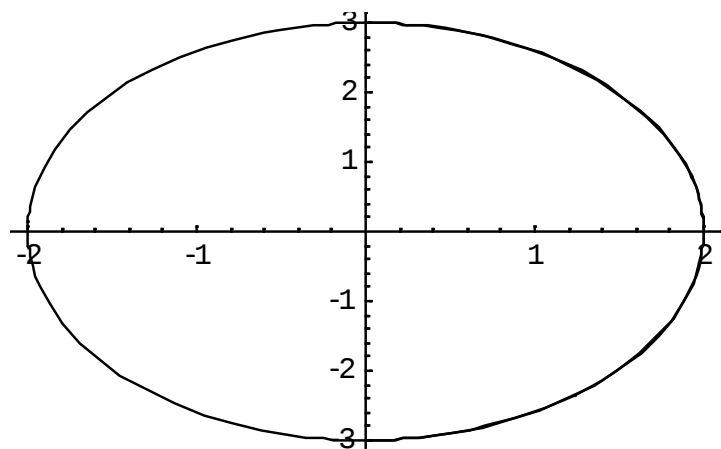


b)  $\varphi_1 - \varphi_2 = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$  elipsę o równaniu  $\frac{q_1^2}{X^2} + \frac{q_2^2}{Y^2} = 1$

Przykład:

$$X = 2, \quad \omega_1 = 3\pi, \quad \varphi_1 = 2\pi$$

$$Y = 3, \quad \omega_2 = 3\pi, \quad \varphi_2 = \pi/2$$



2) w przypadku, gdy mamy do czynienia z ruchami o *różnych częstościach* to trajektoria ruchu wypadkowego jest bardziej złożona – otrzymamy ruch po torze krzywoliniowym;

w zależności od częstości otrzymamy

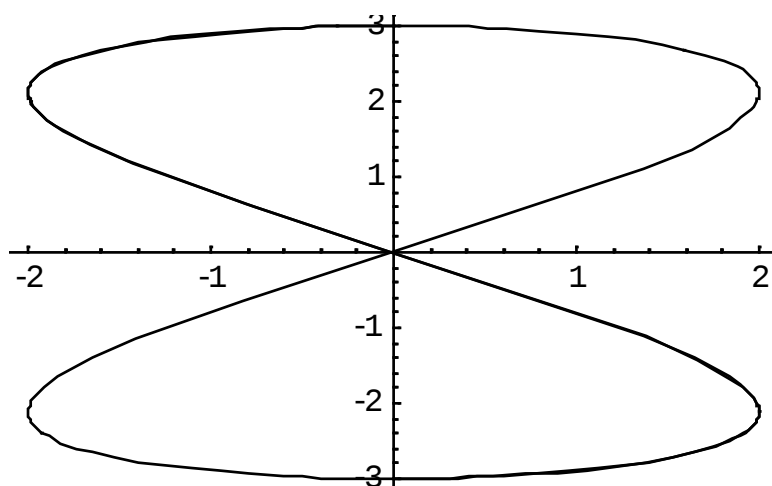
- a) częstości są współmierne to ruch wypadkowy jest okresowy i tor punktu jest krzywą zamkniętą

Przykład:  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2, \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{1}$

$$X = 2, \quad \omega_1 = 6\pi, \quad \varphi_1 = 2\pi$$

$$Y = 3, \quad \omega_2 = 3\pi, \quad \varphi_2 = 3\pi/2$$

$$t \in \langle 0, 1 \rangle$$

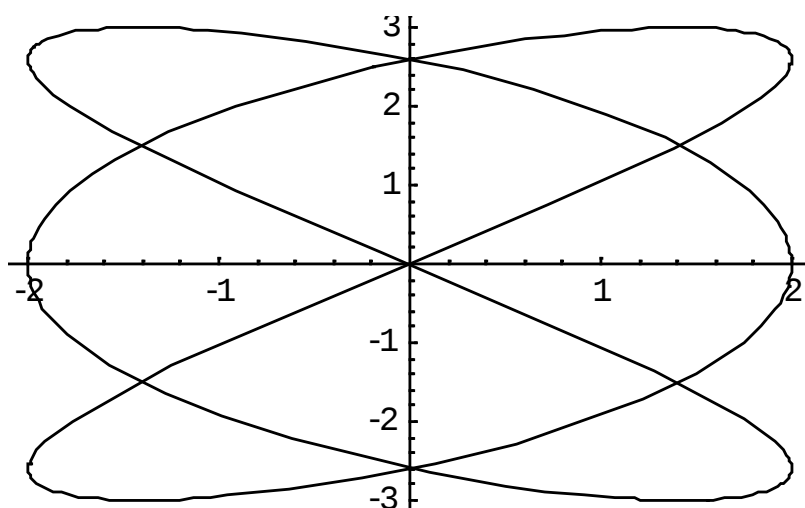


Przykład:  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0, \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{2}$

$$X = 2, \quad \omega_1 = 3\pi, \quad \varphi_1 = 2\pi$$

$$Y = 3, \quad \omega_2 = 2\pi, \quad \varphi_2 = 2\pi$$

$$t \in \langle 0, 2 \rangle$$



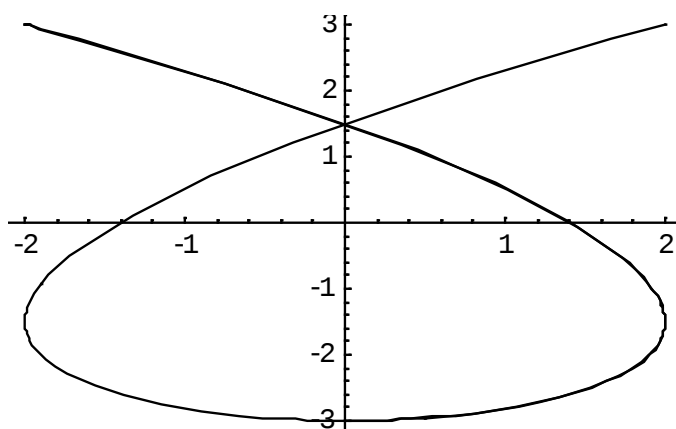
b) częstości są niewspółmierne to tor punktu nie jest krzywą zamkniętą, tor jest zależny od stosunku amplitudy częstości oraz różnicy faz.

Przykład:

$$X = 2, \quad \omega_1 = 3\pi, \quad \varphi_1 = 2\pi$$

$$Y = 3, \quad \omega_2 = 2\pi, \quad \varphi_2 = 7\pi/2$$

$$t \in \langle 0, 1.5 \rangle$$

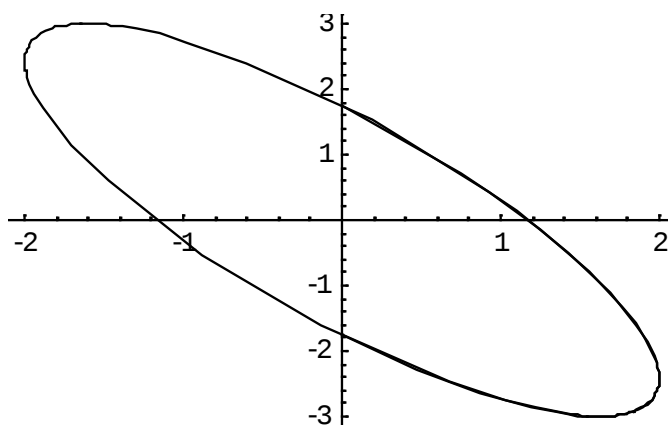


Przykład:

$$X = 2, \quad \omega_1 = 3\pi, \quad \varphi_1 = 2\pi$$

$$Y = 3, \quad \omega_2 = 3\pi, \quad \varphi_2 = 4\pi/5$$

$$t \in \langle 0, 1 \rangle$$

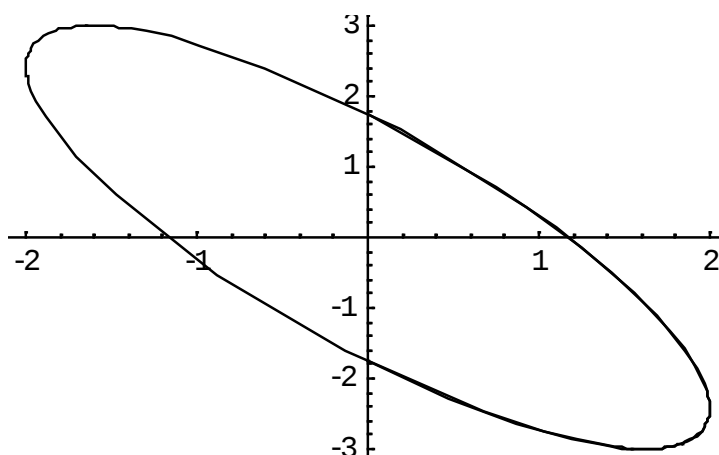


Przykład:

$$X = 2, \quad \omega_1 = 3\pi, \quad \varphi_1 = \pi$$

$$Y = 3, \quad \omega_2 = 3\pi, \quad \varphi_2 = 4\pi/5$$

$$t \in \langle 0, 1 \rangle$$



Otrzymane przebiegi nazywamy **figurami (liniami) Lissajous**.

## 5. Schemat dynamiczny.

**Schematem dynamicznym** ustroju budowlanego (konstrukcji) nazywamy schemat statyczny uzupełniony informacjami istotnymi z punktu widzenia dynamiki.

Do informacji tych należy

- ✍ opis wielkości i rozkładu mas,
- ✍ opis charakteru i rozkładu oporów ruchu,
- ✍ opis zewnętrznych sił czynnych (sił wzbudzających) jako funkcji miejsca i czasu.

Stan przemieszczenia punktów masowych należących do danego ustroju można opisać za pomocą pewnego zbioru wielkości, zwanych **współrzednymi uogólnionymi**.

**Współrzedne uogólnione** są to informacje geometryczne służące do opisu elementów pola masowego.

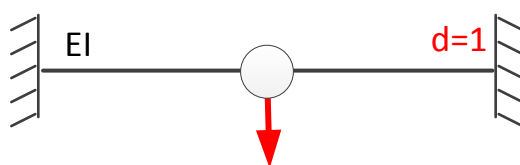
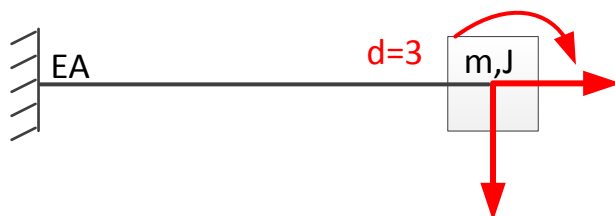
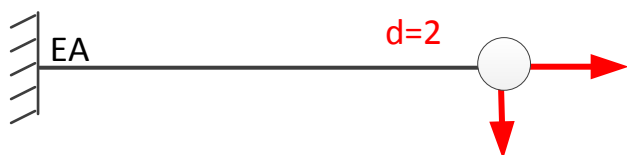
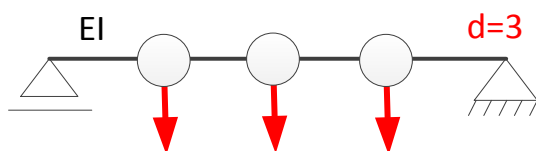
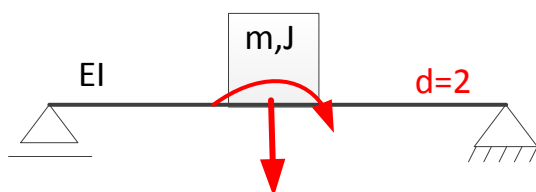
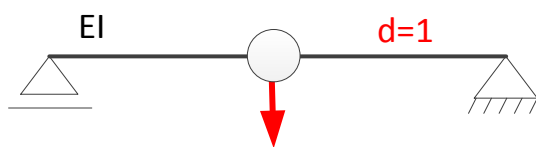
**Liczba niezależnych współrzędnych uogólnionych niezbędnych do określenia położenia wszystkich punktów masowych w danej chwili względem stanu równowagi statycznej nazywa się liczbą dynamicznych stopni swobody  $d$ .**

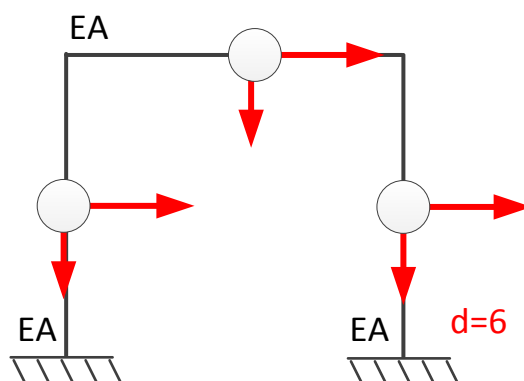
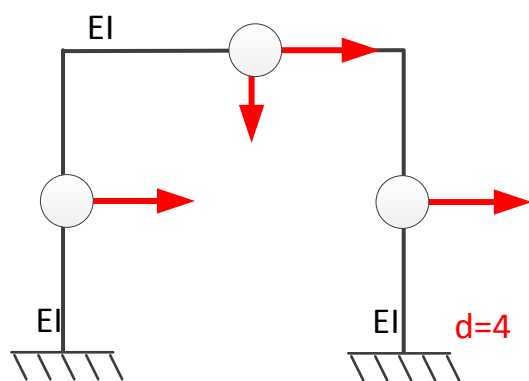
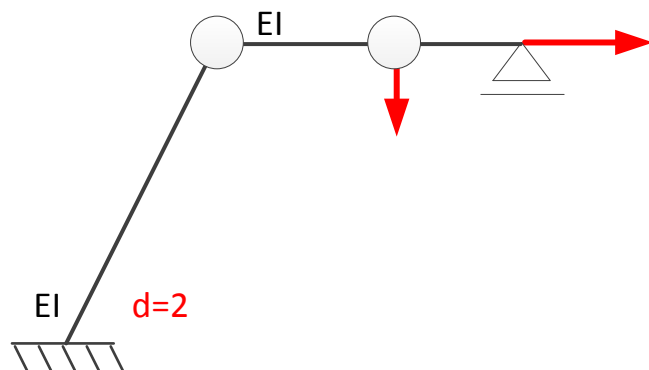
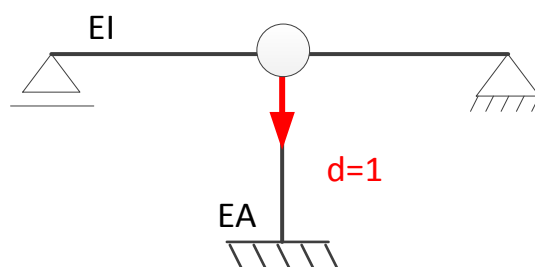
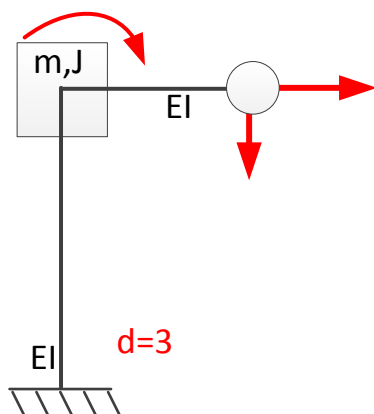
*Punkt masowy ma dwa stopnie swobody na płaszczyźnie i trzy w przestrzeni. Tarcza ma trzy stopnie swobody na płaszczyźnie, a bryła sześć stopni swobody w przestrzeni.*

*Liczba dynamicznych stopni swobody układu złożonego jest równa sumie lokalnych stopni swobody elementów pola masowego zmniejszonej o liczbę ograniczeń kinematycznych nałożonych przez więzi nieodkształcalne.*

W wyniku dyskretyzacji konstrukcji ciągłych, schematy dynamiczne ze względu na liczbę dynamicznych stopni swobody dzielimy na:

- **układy o jednym stopniu swobody**
- **układy o skończonej liczbie stopni swobody (układy dyskretne)**
- **układy o nieskończonej liczbie stopni swobody (układy ciągłe)**

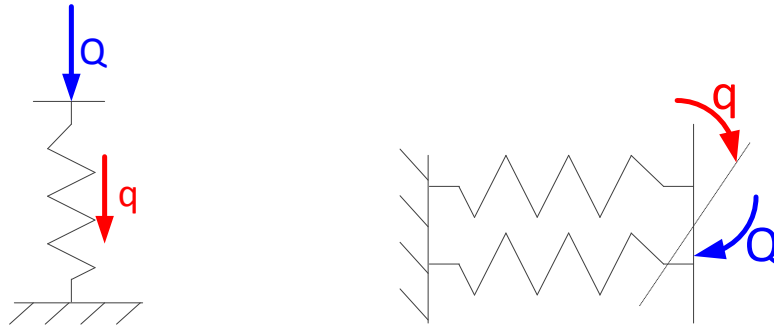
Przykłady układów płaskich o różnych stopniach swobody:



## 6. Więzi odkształcalne.

### 6.1. Izolowana więź sprężysta

Więzi odkształcalne nie ograniczają ruchu konstrukcji tak jak więzi nieodkształcalne. Często więzi liniowo sprężyste przedstawiamy w formie „sprężynek”



**Sztywnością więzi sprężystej** nazywamy stosunek uogólnionej siły  $Q$  do odpowiadającego jej uogólnionego przemieszczenia  $q$ .

$$k = \frac{Q}{q}$$

$k$  [N/m] - sztywność więzi liniowej sprężystej

$k$  [Nm/rad] - sztywność więzi rotacyjnej sprężystej

Stosunek uogólnionego przemieszczenia  $q$  do uogólnionej siły  $\theta$  nazywamy **podatnością więzi**  $\delta$  [m/N]

$$\delta = \frac{q}{Q}$$

$\delta$  [m/N] - podatność więzi liniowej sprężystej

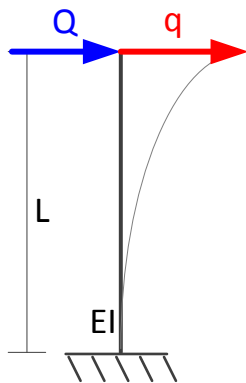
$\delta$  [rad/Nm] - podatność więzi rotacyjnej sprężystej

Ze wzorów wynika, że  $k\delta = 1$  oraz  $k = Q$  gdy  $q = 1$  oraz  $\delta = q$  gdy  $Q = 1$ .

Zakładamy, że parametry więzi sprężystych nie zależą od czasu (**układy skleronomiczne**). Więż liniowa sprężysta gromadzi **energię potencjalną odkształcenia** o wartości:

$$E_p = \frac{1}{2} Qq = \frac{1}{2} kq^2 \quad [\text{Nm}]$$

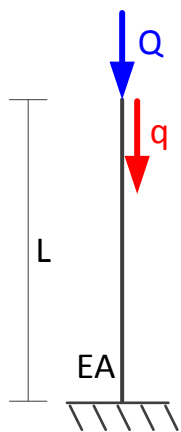
Jeżeli rozpatrujemy układ o kilku stopniach swobody, to więzi w tym układzie na ogół są sprężone. Wyznacza się wtedy macierz podatności lub sztywności układu.

Przykłady wyznaczonych sztywności i podatności układów o jednym stopniu swobody.

$$q = \frac{QL^3}{3EI}$$

$$\delta = \frac{L^3}{3EI}$$

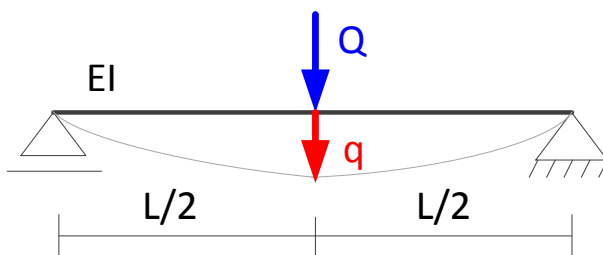
$$k = \frac{3EI}{L^3}$$



$$q = \frac{QL}{EA}$$

$$\delta = \frac{L}{EA}$$

$$k = \frac{EA}{L}$$



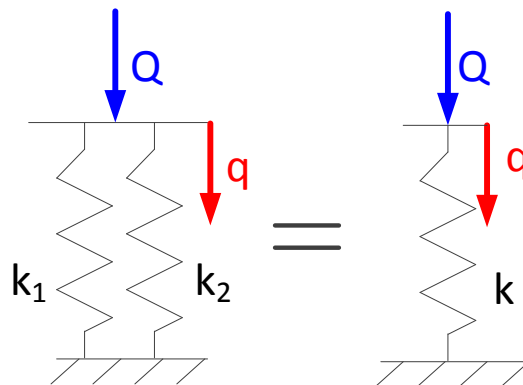
$$q = \frac{QL^3}{48EI}$$

$$\delta = \frac{L^3}{48EI}$$

$$k = \frac{48EI}{L^3}$$

Więzi sprężyste mogą występować w zestawach.

Dla **układu równoległego** mamy:



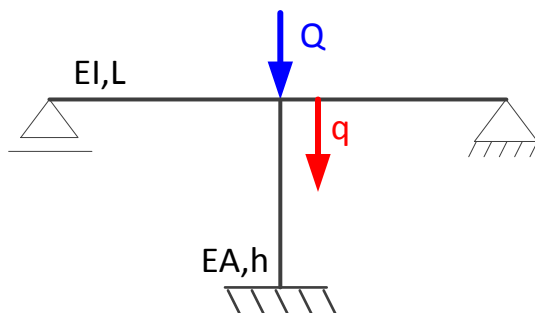
$$Q = k_1 q + k_2 q = (k_1 + k_2) q = k q$$

stąd:

$$k = k_1 + k_2,$$

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2}$$

Przykład:

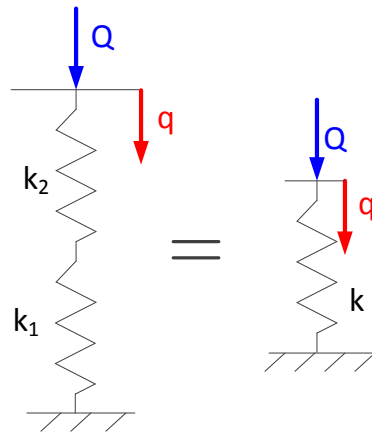


$$k_1 = \frac{48EI}{L^3}$$

$$k_2 = \frac{EA}{h}$$

$$k = k_1 + k_2 = \frac{48EI}{L^3} + \frac{EA}{h}$$

Dla **układu szeregowego** mamy:



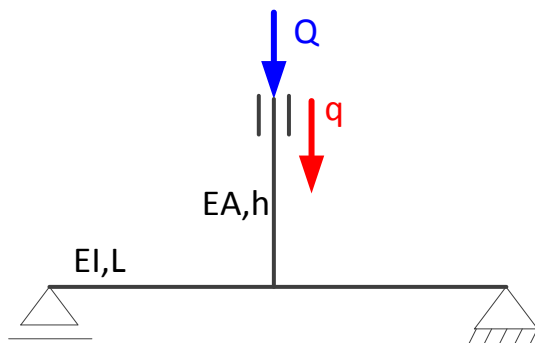
$$q = \frac{Q}{k_1} + \frac{Q}{k_2} = Q \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = \frac{Q}{k}$$

stąd:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \rightarrow \quad k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2},$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

Przykład:



$$k_1 = \frac{EA}{h}$$

$$k_2 = \frac{48EI}{L^3}$$

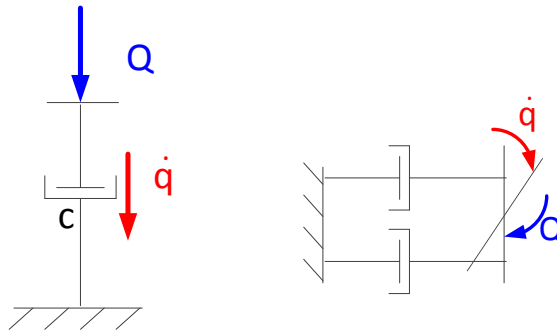
$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{h}{EA} + \frac{L^3}{48EI}$$

$$k = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\frac{h}{EA} + \frac{L^3}{48EI}}$$

## 6.2. Izolowana więź tłumiąca

W układach dynamicznych mogą też występować, oprócz więzi sprężystych, więzi odkształcalne, których reakcje opisują opory ruchu.

Najprostszym przykładem jest **tłumik wiskotyczny** (model Newtona). Tłumik taki reaguje siłą proporcjonalną do prędkości przemieszczenia. Więzi opisujące opory ruchu przyjmuje się w postaci:



Kropka  $\dot{q}(t)$  oznacza pochodną po czasie,  $\dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt}$

**Parametrem  $c$  tłumika wiskotycznego** nazywamy stosunek siły czynnej  $Q$  do prędkości przemieszczenia:

$$c = \frac{Q}{\dot{q}}$$

$c$  [ N s / m ] – parametr tłumienia liniowej więzi tłumiącej

$c$  [ N m s / rad ] - parametr tłumienia rotacyjnej więzi tłumiącej

Zauważmy, że siły oporu będziemy przyjmować jako proporcjonalne do prędkości

$$Q(t) = c\dot{q}(t)$$

**Energia dysypowana (moc tłumienia)** – energia gromadzona w tłumiku:

$$\Phi = \frac{1}{2} c \dot{q}^2 \quad [\text{Nm/s}]$$

Opór wiskotyczny występuje przy ruchu w płynie lepkiem, przy zachowaniu przepływu laminarnego i przy małych prędkościach.

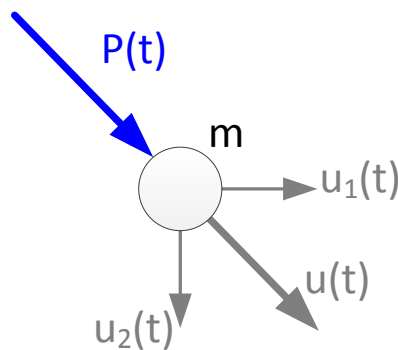
W przypadku drgań układów mechanicznych, przy braku smarowania występuje opór znany **tarcie suche** (tarcie Coulomba), opisany wzorem  $Q(t) = B \cdot \text{sgn}(\dot{q})$ .

Czasami opis tarcia jest funkcją bardziej złożoną i mogą to być nieliniowe funkcje prędkości zależne od wyższych potęg, np. **tarcie turbulentne**  $Q(t) = B \cdot \dot{q}^2 \cdot \text{sgn}(\dot{q})$ .

## 7. Podstawowe prawa dynamiki.

Równania ruchu układu materialnego, lub też modelu obliczeniowego konstrukcji, mogą być wyprowadzane w różny sposób. W czasie ruchu takiego układu powstają siły bezwładności. Stąd podstawowe znaczenie w dynamice ma **drugie prawo Newtona**, które brzmi:

*Prędkość zmiany pędu punktu materialnego o masie  $m$   
jest równa sile działającej na ten punkt.*



Jeśli przez  $\bar{u}(t)$  oznaczmy wektor przemieszczeń masy  $m$ , a przez  $\bar{P}(t)$  działającą siłę, to drugie prawo Newtona przyjmie postać:

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{d\bar{u}}{dt} \right) = \bar{P}(t)$$

gdy  $m = \text{const}$ , to otrzymuje się:

$$\frac{md^2\bar{u}(t)}{dt^2} = \bar{P}(t)$$

$$m\ddot{\bar{u}}(t) = \bar{P}(t)$$

**Zasada d’Alamberta** – podczas ruchu masy  $m$  pojawia się siła masowa, którą nazywamy **siłą bezwładności (inercji)**.

Siłę bezwładności, oznaczmy symbolem  $\bar{B}$

$$\bar{B} = -m\ddot{u}$$

Zależność  $m\ddot{u}(t) = \bar{P}(t)$  możemy zapisać:

$$\bar{P}(t) + \bar{B}(t) = 0$$

Równanie określa **zasadę d’Alamberta**, która mówi, że

**W każdej chwili siły działające na punkt materialny w czasie ruchu spełniają, wraz z siłą bezwładności, warunki równowagi.**

Zasada ta jest ważna także dla układu o wielu stopniach swobody. Jeżeli w układzie występują siły czynne, siły bezwładności i siły oporu, to spełniają one warunki równowagi. Powyższe stwierdzenie jest podstawą budowy równań ruchu układów materialnych metodami statyki. Metoda ta nazywana jest **kinetostatyczną**, polega na stosowaniu metod statycznych w analizie dynamicznej układów, przy czym obciążenia należy uzupełnić o siły kinetyczne pojawiające się dodatkowo w trakcie ruchu.

Założmy [zob. Langer], że przemieszczenie  $\bar{u}$  jest jednorodną funkcją zbioru współrzędnych uogólnionych  $q_i$ . Równanie Newtona

$$\frac{md^2\bar{u}(t)}{dt^2} = \bar{P}(t)$$

nie zmienia sensu, jeśli zapiszemy je w postaci:

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{d\bar{u}(t)}{dt}\right)\frac{\partial\bar{u}}{\partial q_i} = P(t)\frac{\partial\bar{u}}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

Korzystając z faktu, że energia kinetyczna wynosi  $E_k = \frac{1}{2}m\dot{\bar{u}}\dot{\bar{u}}$ , możemy zapisać lewą stronę powyższego równania

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{d\bar{u}(t)}{dt}\right)\frac{\partial\bar{u}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i}$$

A prawa strona wyraża składowe siły zewnętrznej  $\bar{P}(t)$  w kierunkach współrzędnych  $q_i$

$$P(t)\frac{\partial\bar{u}}{\partial q_i} = P_i$$

$P_i$  jest **uogólnioną siłą zewnętrzną** odpowiadającą współrzędnej  $q_i$ .

Wówczas otrzymujemy równanie

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = P_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

znane pod nazwą **równań Lagrange'a**.

W przypadku **ustrojów odkształcalnych o zachowawczej postaci równowagi**, składowe siły  $P_i$  są sumą składowych wszystkich sił działających na ustrój, poza siłami bezwładności. Zatem :

$$P_i = F_i - K_i - C_i$$

gdzie:

$F_i$  – składowe zewnętrznych czynnych

$K_i$  – składowe reakcji więzi sprężystych układu

$C_i$  – składowe sił oporów ruchu (reakcji tłumików)

czyli

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial E_p}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}$$

gdzie:

$L$  - praca zewnętrznych sił czynnych (w sensie pracy przygotowanej)

$E_p$  - energia potencjalna odkształcenia

$\Phi$  - funkcja tłumienia (wymiar mocy),  $\Phi = \frac{1}{2} c \dot{q}^2$

Ostatecznie **równania Lagrange'a dla ustroju budowlanego** mają postać:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

lub w notacji wektorowej:

$$\frac{d}{dt} \text{grad } E_k(\dot{\bar{q}}) - \text{grad } E_k(\bar{q}) + \text{grad } \Phi(\dot{\bar{q}}) + \text{grad } E_p(\bar{q}) = \text{grad } L(\bar{q})$$

gdzie:

$E_k$  - energia kinetyczna układu

$E_p$  - energia potencjalna układu

$\Phi$  - funkcja tłumienia

$L$  - praca sił zewnętrznych

W przypadku małych drgań, energia kinematyczna nie zależy od przemieszczeń uogólnionych, a więc:

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_i} = 0, \quad \text{grad } E_k(\bar{q}_i) = 0$$

***Układ równań opisujących ruch dowolnego ustroju budowlanego wykonującego małe drgania opisane zbiorem współrzędnych uogólnionych  $q_i$  mają postać:***

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

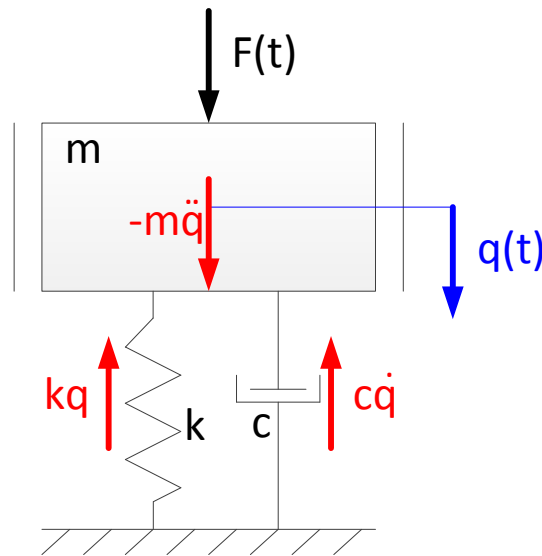
lub

$$\frac{d}{dt} \text{grad } E_k(\dot{\bar{q}}) + \text{grad } \Phi(\dot{\bar{q}}) + \text{grad } E_p(\bar{q}) = \text{grad } L(\bar{q})$$

Do budowania równań ruchu układu można także wykorzystać ***zasadę Hamiltona*** lub ***zasadę prac przygotowanych***. [zobacz np. Chmielewski]

## 8. Układy o jednym stopniu swobody.

Rozpatrzmy drgania liniowe układu o jednym stopniu swobody



Układ składa się z masy  $m$  i sprężyny o sztywności  $k$  oraz tłumika o parametrze  $c$ . Drgania wzbudzone są siłą  $F(t)$ . Drgania rozpatrujemy względem warunków równowagi (w każdej chwili siły działające na punkt materialny w ruchu spełniają wraz z siłą bezwładności równanie równowagi).

$$F + (-m\ddot{q}) - kq - c\dot{q} = 0$$

Rozpatrując równowagę sił działających na drgającą masę  $m$  otrzymuje się równania różniczkowe:

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = F(t)$$

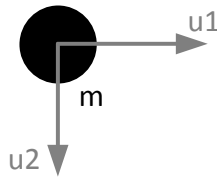
### 8.1. Modelowanie układów o jednym stopniu swobody.

Każdy układ 1DOF można zastąpić schematem ideowym, dla którego można sporządzić bilans energetyczny.

$$E_p = \frac{1}{2}kq^2, \quad \Phi = \frac{1}{2}c\dot{q}^2, \quad E_k = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$$

Energia kinetyczna punktu materialnego

Energię kinetyczną punktu materialnego określa wzór:

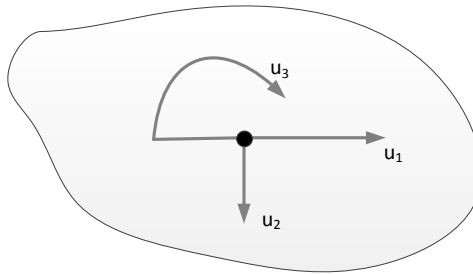


$$E_k = \frac{1}{2} (m\dot{\mathbf{u}}) \cdot \dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} m (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2)$$

gdzie  $\dot{u}_1$  i  $\dot{u}_2$  są ortokartezjańskimi współzrędnymi prędkości punktu.

Energia kinetyczna tarczy materialnej

Można wykazać, że w ruchu płaskim tarczy materialnej energia kinetyczna jest równa:



$$E_k = \frac{1}{2} (m\dot{u}_1^2 + m\dot{u}_2^2 + J_0\dot{u}_3^2)$$

gdzie:

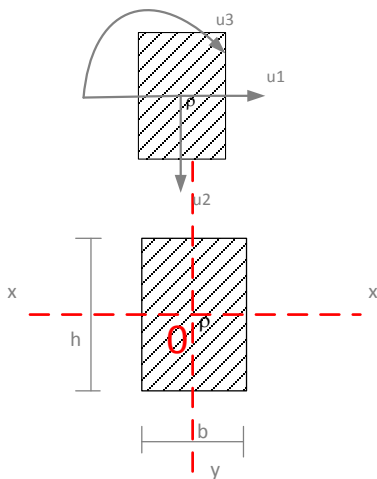
$m$  - masa tarczy

$J_0$  - centralny biegunowy moment bezwładności masy

$\dot{u}_1, \dot{u}_2$  - współrzędne prędkości translacyjnej środka masy

$\dot{u}_3$  - prędkość rotacyjna

Przykładowo dla prostokątnej tarczy masowej:



$$E_k = \frac{1}{2} (m\dot{u}_1^2 + m\dot{u}_2^2 + J_0\dot{u}_3^2)$$

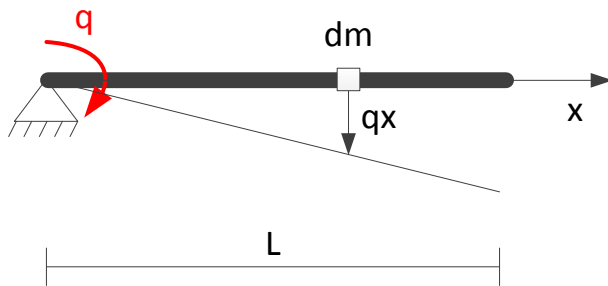
$m$  – masa

$J_0$  – centralny biegunowy moment bezwładności obrotowej masy  $m$

$\rho$  – gęstość [ $\text{kg}/\text{m}^2$ ]

$m = \rho \cdot b \cdot h$  [kg]

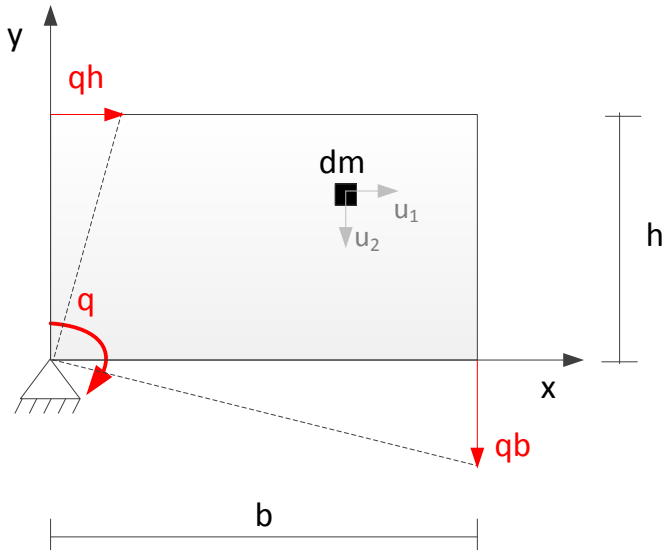
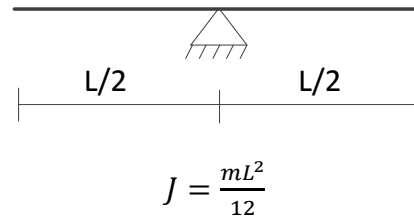
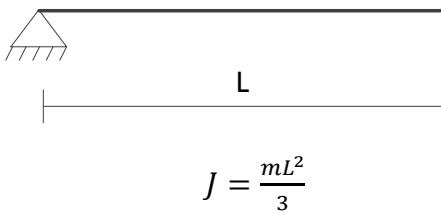
$$\begin{aligned} J_0 &= \rho \cdot I_0 = \rho(I_x + I_y) = \rho \cdot \left( \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} \right) = \frac{m}{bh} \cdot \left( \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} \right) \\ &= \frac{m}{12} \cdot (h^2 + b^2) \end{aligned}$$

Energia masy rozłożonej

Gęstość masy  $\lambda = \frac{m}{L} \quad [\frac{kg}{m}]$

$$E_k = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} dm (x\dot{q})^2 \right] = \frac{1}{2} \lambda \int_0^L [x^2 dx (\dot{q})^2 q] = \frac{1}{2} \lambda \frac{1}{3} L^3 \dot{q}^2 = \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{q}^2 = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{q}^2$$

Przypadki



Gęstość  $\mu = \frac{m}{bh} \quad [\frac{kg}{m^2}]$

$$E_k = \iint \frac{1}{2} m (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^h [\mu dx dy ((x\dot{q})^2 + (y\dot{q})^2)] = \frac{1}{2} \mu \int_0^b \int_0^h [(x^2 + y^2) dx dy \cdot \dot{q}^2] =$$

$$\frac{1}{2} \mu \left[ \frac{bh^3}{3} + \frac{b^3h}{3} \right] \cdot \dot{q}^2 = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{q}^2$$

## 8.2. Zagadnienie własne.

Rozwiązaniem zagadnienia własnego nazywamy w dynamice budowli ustalenie okoliczności, w których równanie ruchu pozbawione składników reprezentujących opory ruchu (przyjmujemy **układ zachowawczy**, tzn. nietłumiony) oraz składników reprezentujących siłę wzbudzącą, może mieć niezerowe rozwiązanie.

Poszukiwana jest więc całka równania

$$m\ddot{q}(t) + kq(t) = 0$$

Funkcja  $q(t)$  opisuje tzw. **drżania własne układu**.

Podstawiając  $q = e^{\lambda t}$  otrzymamy równanie charakterystyczne

$$m\lambda^2 + k = 0$$

którego pierwiastkami są liczby zespolone

$$\lambda_1 = i\omega, \lambda_2 = -i\omega,$$

gdzie  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\omega^2 = k/m$ .

Całki szczególne równania jednorodnego wynoszą  $e^{i\omega t}$  i  $e^{-i\omega t}$ .

Całka ogólna równania jednorodnego ma postać

$$q(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

Jeżeli uwzględnimy wzory Eulera

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$$

to całkę ogólną równania można zapisać

$$q(t) = q_s \sin \omega t + q_c \cos \omega t = a \sin(\omega t + \varphi)$$

gdzie  $q_s$  i  $q_c$  lub  $a$  i  $\varphi$  są dowolnymi stałymi.  $q(t)$  jest funkcją harmoniczną.

(zobacz – rozdział 3.1)

Stacjonarny, harmoniczny proces opisany funkcją

$$q(t) = q_s \sin \omega t + q_c \cos \omega t = a \sin(\omega t + \varphi)$$

nazywamy **drżaniami własnymi**.

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0$$

gdzie:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ - jest częstotliwością własną układu [rad/s]}$$

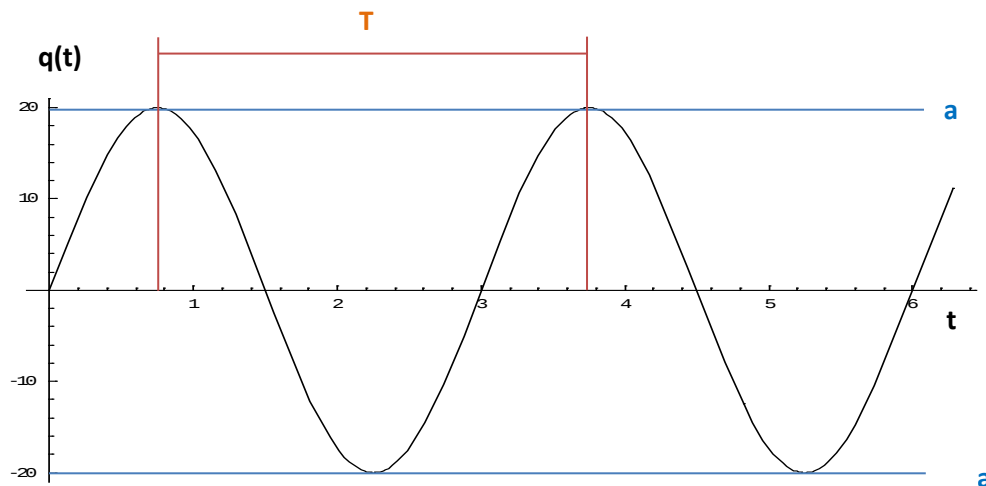
Drgania własne układu zachowawczego są procesem harmonicznym z częstością kołową  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Częstość drgań własnych jest cechą indywidualną układu.

Okres drgań własnych

$$T = \frac{2\pi}{\omega} [\text{s}]$$

Częstość naturalna (częstotliwość własna)

$$f = \frac{\omega}{2\pi} [\text{Hz}]$$



W praktyce operuje się często pojęciami technicznymi

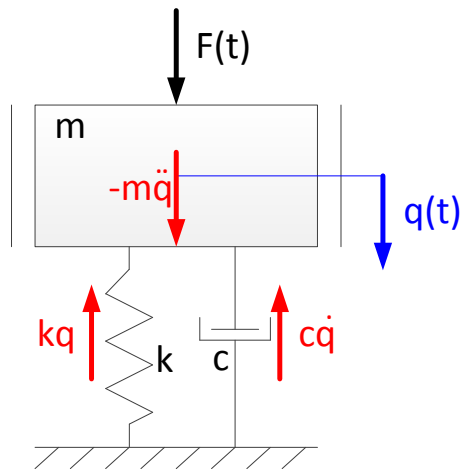
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} - \text{częstość fizyczna [c/s=Hz]}$$

$$n = 60f = \frac{60}{T} - \text{częstość techniczna [c/min]}$$

c – ilość cykli [obr/min]

**Przykłady do rozwiązania**

Każdy układ 1DOF można zastąpić schematem ideowym, dla którego znane jest rozwiązanie problemu drgań własnych

***Dynamiczne r-nie ruchu***

$$\boxed{m\ddot{q}(t)} + \boxed{c\dot{q}(t)} + \boxed{kq(t)} = \boxed{F(t)}$$

siła bezwładności      tłumienie      sztywność      siła wymuszająca

$$E_p = \frac{1}{2}kq^2, \quad \Phi = \frac{1}{2}c\dot{q}^2, \quad E_k = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$$

**Drgania własne**układ nietłumiony

$$m\ddot{q} + kq = 0$$

$$q(t) = q_s \sin \omega t + q_c \cos \omega t, \quad \omega = \sqrt{k/m}$$

układ tłumiony

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0, \quad \text{inaczej } \ddot{q} + 2\alpha\omega\dot{q} + \omega^2q = 0$$

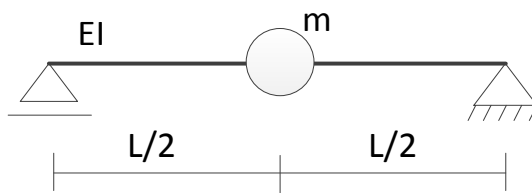
$$\omega = \sqrt{k/m}, \quad \alpha = c/2\sqrt{km}$$

W układach 1DOF charakteryzujących się statyczną wyznaczalnością ( $n_h=0$ ) należy wyznaczać bezpośrednio podatność  $\delta$ , zaś charakteryzujących się geometryczną wyznaczalnością w sensie dynamicznym ( $n_{gd}=0$ ) wyznacza się bezpośrednio sztywność  $k$ .

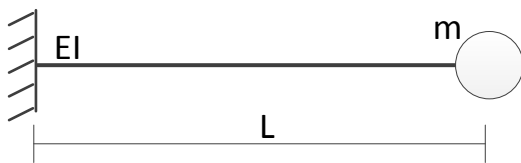
$$k = k_{qq} - \frac{k_{qx}^2}{k_{xx}}, \quad \delta = \delta_{QQ} - \frac{\delta_{QX}^2}{\delta_{XX}}$$

Przykłady z odpowiedziami do rozwiązania

Znaleźć częstość kołową drgań własnych dla układów



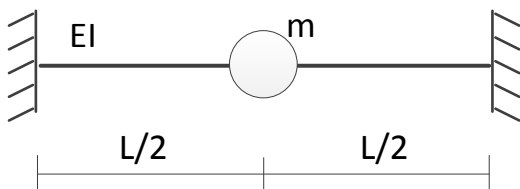
$$\omega = \sqrt{\frac{48EI}{mL^3}}$$



$$\omega = \sqrt{\frac{3EI}{mL^3}}$$



$$\omega = \sqrt{\frac{EA}{mL}}$$



$$\omega = \sqrt{\frac{192EI}{mL^3}}$$

### 8.3. Drgania swobodne.

#### 8.3.1. Drgania swobodne nietłumione.

Drgania własne nie zachodzą w rzeczywistości. Jest to tylko matematyczny opis dyspozycji ustroju – możliwości ustroju do wykonywania takich drgań. Aby ruch układu faktycznie zaistniał – musi być bodziec. Jeżeli go znamy, to stałe  $q_s$  i  $q_c$  lub  $a$  i  $\varphi$  możemy wyznaczyć. Takim bodźcem jest zaburzenie początkowego stanu równowagi, czyli nałożenie warunków początkowych

$$\begin{aligned} q(0) &= q_o \\ \dot{q}(0) &= \dot{q}_o \end{aligned}$$

Wówczas

$$\begin{aligned} q(t) &= q_s \sin \omega t + q_c \cos \omega t & q(0) &= q_o = q_c \\ \dot{q}(t) &= q_s \omega \cos \omega t - q_c \omega \sin \omega t & \dot{q}(0) &= \dot{q}_o = q_s \omega \\ \ddot{q}(t) &= -q_s \omega^2 \sin \omega t - q_c \omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 q(t) \end{aligned}$$

Po obliczeniu stałych  $q_s$  i  $q_c$  otrzymuje się funkcję  $q(t)$  opisującą tzw. **drżania swobodne układu nietłumionego**

Równanie  $q(t) = \frac{\dot{q}_o}{\omega} \sin \omega t + q_o \cos \omega t$  opisuje **drżania swobodne** układu, czyli drżania wywołane wyłącznie początkowym zaburzeniem stanu równowagi.

Przechodząc do zapisu zwiniętego  $q(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$  otrzymuje się:

$$a = \sqrt{\frac{\dot{q}_o^2}{\omega^2} + q_o^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{q_o \omega}{\dot{q}_o}$$

### 8.3.2. Drgania swobodne tłumione.

Równanie różniczkowe:

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = F(t) = 0$$

Funkcja  $q(t)$  opisuje tzw. **drżania swobodne układu tłumionego**

Po podzieleniu przez  $m$  otrzymuje się:

$$\ddot{q}(t) + 2\alpha\omega\dot{q}(t) + \omega^2q(t) = 0$$

gdzie:

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  - jest *częstotliwością własną układu*

$\delta = \alpha\omega = \frac{c}{2m}$  ( $\xi \ll 1$ ) - jest *współczynnikiem tłumienia*.

Wielkość  $\alpha = \frac{c}{2\sqrt{k \cdot m}}$  nazywamy *liczbą tłumienia*.

Oznaczając

$\omega_d^2 = \omega^2(1 - \alpha^2)$  jako *tłumioną częstotliwość własną*.

dla  $\alpha < 1$  otrzymuje się rozwiązanie w postaci:

$$q(t) = e^{-\alpha\omega t}(C_1 \sin \omega_d t + C_2 \cos \omega_d t) = ae^{-\alpha\omega t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

Funkcja opisuje ruch quasi-harmoniczny, zanikający z modulacją amplitudy  $ae^{-\alpha\omega t}$ .

Niech w chwili  $t = 0$  znane są warunki początkowe:

$$q(0) = q_o$$

$$\dot{q}(0) = \dot{q}_o$$

Po uwzględnieniu warunków początkowych otrzymamy

$$q(t) = e^{-\alpha\omega t}(C_1 \sin \omega_d t + C_2 \cos \omega_d t)$$

$$q(0) = q_o = C_2$$

$$\dot{q}(t) = -\alpha\omega e^{-\alpha\omega t}(C_1 \sin \omega_d t + C_2 \cos \omega_d t) + e^{-\alpha\omega t}\omega_d(C_1 \cos \omega_d t - C_2 \sin \omega_d t)$$

$$\dot{q}(0) = \dot{q}_o = -\alpha\omega C_2 + \omega_d C_1$$

$$\text{stąd } C_1 = \frac{\dot{q}_o}{\omega_d} + \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} q_o$$

Po podstawieniu otrzymuje się

$$q(t) = e^{-\alpha\omega t}(C_1 \sin \omega_d t + C_2 \cos \omega_d t) = ae^{-\alpha\omega t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

gdzie

$$a = \frac{1}{\omega_d} \sqrt{\omega^2 q_0^2 + \dot{q}_0^2 + 2\alpha\omega q_0 \dot{q}_0}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{q_0 \omega_d}{\alpha\omega q_0 + \dot{q}_0}$$

Zauważmy, że drgania swobodne zanikają wykładniczo wraz z upływem czasu. Ruch opisywany funkcjami jest quasi-harmonicznym ruchem zanikającym, modulowanym funkcją wykładniczą  $e^{-\alpha\omega t}$ .

(zobacz – rozdział 3.2)

***Drgania własne układu tłumionego są procesem quasi-harmonicznym, zanikającym zgodnie z funkcją wykładniczą.***

Tłumiona częstość własna i odpowiadający jej okres własny określne są związkami:

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \alpha^2} < \omega$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{T}{\sqrt{1 - \alpha^2}} > T$$

Tłumienie odpowiadające  $\alpha = 1$  nazywamy **tłumieniem krytycznym**, a gdy  $\alpha > 1$  nazywamy **tłumieniem nadkrytycznym**.

Jeżeli  $\alpha \geq 1$  to ruch jest aperiodyczny, nieoscylacyjny, nie ma charakteru drgań. Wychylenie po przekroczeniu maksimum maleje do zera (asymptotycznie). Drgania aperiodyczne.

W konstrukcjach budowlanych  $\alpha \ll 1$  i ten przypadek zostanie opisany.

Rozwiązanie można przedstawić w postaci:

$$q(t) = a_0 e^{-\alpha \omega t} \sin(\omega_d t + \varphi_0)$$

Gdzie amplituda  $a_0$  i faza  $\varphi_0$  określone są zależnościami:

$$a_0 = \sqrt{q_0^2 + \left( \frac{\alpha \omega q_0 + \dot{q}_0}{\omega_d} \right)^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{q_0 \omega_d}{\alpha \omega q_0 + \dot{q}_0}$$

Zauważmy, że stosunek:

$$\frac{q(t)}{q(t + T_d)} = \frac{a_0 e^{-\alpha \omega t} \sin(\omega_d t + \varphi_0)}{a_0 e^{-\alpha \omega (t + T_d)} \sin[\omega_d (t + T_d) + \varphi_0]} = e^{-\alpha \omega T_d}$$

nie zależy od czasu  $t$  i jest równy stosunkowi dwóch kolejnych maksymalnych wychyleń.

Parametr tłumienia można wyznaczyć doświadczalnie badając stosunek wychylenia  $q(t)$  do wychylenia  $q(t + T_d)$ , po okresie  $T_d$ . W wyniku pomiarów oblicza się wielkość bezwymiarową nazywaną **logarytmicznym dekrementem tłumienia**

$$\vartheta = \ln \frac{q(t)}{q(t + T_d)} = \alpha \omega T_d = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

Wielkość ta określa odwrotność liczby cykli, po której amplituda drgań zmniejszy się  $e$  razy.

Gdy  $\alpha \ll 1$  można przyjąć

$$\vartheta \approx 2\pi\alpha.$$

**Liczbę tłumienia** określa wzór:

$$\alpha = \frac{\vartheta}{\sqrt{4\pi^2 + \vartheta^2}} \approx \frac{\vartheta}{2\pi} \quad \text{gdy } \vartheta \text{ jest małe}$$

W konstrukcjach budowlanych liczba tłumienia jest na ogół ułamkowa, znacznie mniejsza od jedności i tłumienie nadkrytyczne na ogół nie występuje.

Wielkość  $\alpha$  wyrażona w % wyraża „**procent tłumienia krytycznego**”.

W normach do opisu tłumienia używa się **bezwymiarowego współczynnika tłumienia**

$$\gamma = 2\alpha$$

| Konstrukcje | $\alpha$     | $\gamma$    |
|-------------|--------------|-------------|
| Stalowe     | 0,005-0,0125 | 0,010-0,025 |
| Drewniane   | 0,015-0,025  | 0,030-0,050 |
| Murowe      | 0,020-0,040  | 0,040-0,080 |
| Żelbetowe   | 0,025-0,050  | 0,050-0,100 |

Źródło – Langer s. 23

#### Przykładowe wartości z norm



PN-EN 1991-1-4:2008 Eurokod 1. Oddziaływania na konstrukcje. Część 1-4: Oddziaływania ogólne. Oddziaływania wiatru.

z tabeli F.2 odczytujemy wielkości logarytmicznego dekrementu tłumienia konstrukcyjnego drgań w pierwszej (podstawowej) postaci, wynoszące odpowiednio:

0,02 dla konstrukcji spawanych,

0,03 dla konstrukcji łączonych na śruby wysokiej wytrzymałości

0,05 dla konstrukcji łączonych na śruby zwykłe.



Wg normy PN-77/B-02011 Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenie wiatrem. stosowane były wielkości logarytmicznego dekrementu tłumienia konstrukcyjnego drgań równe:

0,06 dla konstrukcji spawanych

0,08 dla konstrukcji łączonych na śruby.



zalecenia IASS (International Association for Shell and Spatial Structures) podają następujące wielkości liczby tłumienia (ułamka tłumienia krytycznego):

0,012 dla konstrukcji spawanych,

0,02 dla konstrukcji skręcanych na śruby wysokiej wytrzymałości

0,03 dla konstrukcji skręcanych na śruby zwykłe,

**Rodzaje tłumienia.****A. Model tłumienia masowego**

Tłumik wiskotyczny reprezentuje zarówno tłumienie zewnętrzne (np. opór powierza) jak i tłumienie konstrukcyjne. Można przyjąć, że opory ruchu są proporcjonalne do pędu masy, a więc:

$$c = \mu m$$

gdzie:

$\mu$  - jest **wymiarowym parametrem tłumienia**,  $[s^{-1}]$ .

W tym przypadku mamy:

$$\begin{aligned}\delta &= \alpha\omega = \frac{\mu}{2} \quad \left(\alpha = \frac{\mu}{2\omega}\right) \\ \gamma &= \frac{c}{\sqrt{k \cdot m}} = \frac{\mu \cdot m}{\sqrt{k \cdot m}} = \frac{\mu}{\omega} \\ \delta &= \alpha\omega = \frac{c}{2\sqrt{k \cdot m}} \cdot \omega = \frac{\mu \cdot m}{2\sqrt{k \cdot m}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\mu}{2}\end{aligned}$$

Ze wzrostem częstości tłumienie maleje.

**B. Tłumienie Voigta-Kelvina**

Tłumienie reologiczne, materiałowe. Można przyjąć, że tłumienie ma charakter wewnętrzny - konstrukcyjny przyjmując:

$$c = \kappa k$$

gdzie:

$\kappa$  - jest **wymiarowym parametrem tłumienia**  $[s]$ , często nazywany **czasem retardacji**.

W tym przypadku mamy:

$$\begin{aligned}\delta &= \alpha\omega = \frac{\kappa}{2} \omega^2 \quad \left(\alpha = \frac{\kappa\omega}{2}\right) \\ \gamma &= \frac{c}{\sqrt{k \cdot m}} = \frac{\kappa k}{\sqrt{k \cdot m}} = \kappa\omega \\ \delta &= \alpha\omega = \frac{c}{2\sqrt{k \cdot m}} \cdot \omega = \frac{\kappa k}{2\sqrt{k \cdot m}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\kappa}{2} \omega^2\end{aligned}$$

Ze wzrostem częstości tłumienie rośnie.

### C. Wariannt kombinowany

ma postać:

$$c = \kappa k + \mu m$$

W tym przypadku mamy:

$$\delta = \alpha \omega = \frac{\mu}{2} + \frac{\kappa}{2} \omega^2$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{\omega} + \kappa \omega \right)$$

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{km}} = \frac{\kappa k + \mu m}{\sqrt{km}} = \frac{\mu}{\omega} + \kappa \omega$$

### D. Tłumienie stałe (model Sorokina, model stałego dekrementu)

Badania doświadczalne wskazują na to, że własności tłumiące konstrukcji zależą głównie od materiału, z jakiego konstrukcja jest wykonana (np. stal, żelbet, drewno). Określonego rodzaju konstrukcji odpowiada bezwymiarowy współczynnik tłumienia  $\gamma$  [zobacz 8.2.2], który jest „słabo” zależny od częstości własnej  $\omega$ .

$$\gamma = \text{const}$$

## 8.4. Drgania wymuszone.

Przykłady wymuszenia drgań:

- drgania wzbudzone harmonicznie  
(zob. np. Osiński – rozdział 4.1)
- drgania wzbudzone siłą okresową nieharmoniczną  
(zob. np. Gutowski, Świetlicki – rozdział 3.3)
- drgania wymuszone bezwładnościowo  
(zob. np. Osiński – rozdział 4.6)
- drgania wywołane impulsem  
(zob. np. Lipiński – rozdział 2.3)
- drgania wymuszone kinematyczne  
(zob. np. Osiński – rozdział 4.7)
- drgania przy wymuszeniach stochastycznych  
(zob. np. Śniady – rozdział 6)

Dalej przeanalizowano tylko drgania wzbudzone harmonicznie.

**8.4.1. Drgania układu nietłumionego wymuszone harmonicznie.**

Nietłumione drgania układu o jednym stopniu swobody dla układu składającego się z masy  $m$  i sprężyny o sztywności  $k$  mają postać równania

$$m\ddot{q}(t) + kq(t) = f(t)$$

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = \frac{1}{m} f(t)$$

Niech drgania układu wzbudzone są harmonicznie siłą

$$f(t) = a \sin(pt + \varphi).$$

Wówczas równanie ruchu ma postać:

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = \frac{a}{m} \sin(pt + \varphi)$$

gdzie:

$a$  - jest amplitudą wzbudzenia

$pt + \varphi$  - jest fazą drgań harmonicznych

$\varphi$  - jest fazą początkową, najczęściej przyjmuje się  $\varphi=0$  lub  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$p$  - jest **częstością wzbudzenia** [rad/s]

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  - jest częstością własną układu [rad/s]

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne, liniowe, drugiego rzędu, o stałych współczynnikach, niejednorodne.

Rozwiązaniem równania jest suma całki ogólnej spełniającej odpowiednie równanie jednorodne oraz całki szczególnej spełniającej to równanie.

Rozpatrujemy drgania ustalone układu (całka szczególna). Rozwiązania poszukujemy w postaci:

$$q_s(t) = A \sin(pt + \varphi)$$

Po podstawieniu, otrzymuje się **amplitudę drgań**  $A$ :

$$A = \frac{a}{m(\omega^2 - p^2)}$$

Wprowadźmy parametr

$$\eta = \frac{p}{\omega}$$

będący z definicji **względną częstością wzbudzenia**.

Przemieszczenie statyczne oznaczmy

$$q_{st} = \frac{a}{k}$$

Wtedy amplituda ma postać:

$$A = \frac{a}{m(\omega^2 - p^2)} = \frac{a}{m\omega^2(1 - \eta^2)} = \frac{a}{k(1 - \eta^2)} = \frac{q_{st}}{(1 - \eta^2)}$$

stąd rozwiązanie dla ustalonych drgań harmonicznym wynosi:

$$q_s(t) = \frac{a}{m(\omega^2 - p^2)} \sin(pt + \varphi) = \frac{a}{k(1 - \eta^2)} \sin(pt + \varphi)$$

Następnie otrzymujemy:

$$q(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{a}{m(\omega^2 - p^2)} \sin(pt + \varphi)$$

Przyjmuje się, że w chwili początkowej układ był w spoczynku, a więc warunki początkowe miały postać:

$$\begin{aligned} q(0) &= q_0 \\ \dot{q}(0) &= \dot{q}_0 \end{aligned}$$

stałe  $C_1$  i  $C_2$  wyznacza się z warunków początkowych, otrzymując rozwiązanie w postaci:

$$q(t) = \left( q_0 \cos \omega t + \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin \omega t \right) - \frac{q_{st}}{1 - \eta^2} \cos \omega t + \frac{q_{st}}{1 - \eta^2} \sin(pt + \varphi)$$

drgania swobodne  $q_0$

drgania swobodne  $f(t)$

drgania wymuszone  $f(t)$

(jeżeli warunki początkowe są zerowe to drgania nie istnieją)

wszystkie składniki są harmoniczne

Jeżeli  $p \approx \omega$

Zauważmy, że amplituda drgań dąży do nieskończoności, gdy częstość wzbudzenia zbliża się do częstości własnej  $\omega$  układu, a więc układ wpada w **rezonans**.

„**Rezonans** – zjawisko fizyczne zachodzące w układach drganiowych, polegające na szybkim wzroście amplitudy drgań układu, gdy częstotliwość zewnętrznych drgań wymuszających jest równa lub bliska częstotliwości drgań własnych układu”.

➡ „Leksykon naukowo-techniczny” WNT Warszawa 1984r:

Gdy układ drgający o bardzo słabym tłumieniu pobudzany jest drganiem o częstotliwości zbliżonej do jego częstotliwości rezonansowej, układ okresowo pobiera i oddaje energię zmieniając amplitudę cyklicznie co określane jest jako **dudnienie**.

(zobacz – rozdział 4.1)

**Rezonans jest bardzo NIEBEZPIECZNY**, ponieważ wzrost amplitudy drgań doprowadza bardzo szybko do ich zniszczenia.

Przeciwdziałanie występowaniu rezonansu:

- ✍ unikanie wymuszania siłami o częstościach bliskich częstości własnych układu ,
- ✍ tłumienie drgań.

### Przykład

[https://en.wikipedia.org/wiki/Millennium\\_Bridge,\\_London](https://en.wikipedia.org/wiki/Millennium_Bridge,_London)



„Millennium Bridge” zwany także „London Millennium Footbridge” jest stalową, powieszoną kładką nad Tamizą w Londynie. Całkowita długość tego trójprzęsłowego obiektu wynosi 370 m, natomiast najdłuższe przęsło ma Wznoszenie obiektu rozpoczęto w 1998 roku, a jego otwarcie miało miejsce 10 czerwca 2002 roku. Obiekt został zamknięty dwa dni po otwarciu, ponieważ pojawiły się niespodziewane **drgania poprzeczne**. Ustalono że drgania występują na wskutek zjawiska, polegającego na tym, że **przechodzący przez obiekt piesi nieświadomie synchronizowali swoje kroki pogłębiając w ten sposób drgania boczne konstrukcji**. Powodowało to każdorazowe zwiększenie amplitudy drgań, czyli **rezonansu**.

<https://www.youtube.com/watch?v=gQK21572oSU>

<https://www.youtube.com/watch?v=SQEAj29IkNU>

### 8.4.2. Drgania układu tłumionego wymuszone harmonicznie.

Tłumione drgania układu o jednym stopniu swobody wzbudzone siłą  $f(t)$  można przedstawić jako drgania oscylatora o masie  $m$ , więzi sprężystej o sztywności  $k$  i tłumika wiskotycznego o charakterystyce  $c$ .

Przyjęto, że siła w więzi sprężystej jest proporcjonalna do przemieszczenia, a siły oporu są proporcjonalne do prędkości przemieszczenia.

Rozpatrując równowagę sił działających na drgającą masę, otrzymuje się równanie różniczkowe:

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = f(t)$$

Po podzieleniu przez  $m$  otrzymuje się:

$$\ddot{q}(t) + 2\alpha\omega\dot{q}(t) + \omega^2q(t) = \frac{1}{m}f(t)$$

gdzie:

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  - jest **częstotliwością własną układu**

$\delta = \alpha\omega = \frac{c}{2m}$  ( $\alpha \ll 1$ ) - jest **współczynnikiem tłumienia**.

Wielkość  $\alpha = \frac{c}{2\sqrt{k \cdot m}}$  nazywamy **liczbą tłumienia**.

lub

$$\ddot{q}(t) + \gamma\omega\dot{q}(t) + \omega^2q(t) = \frac{1}{m}f(t)$$

gdzie  $\gamma = 2\alpha$  jest **bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia**.

W celu znalezienia całki ogólnej rozpatrujemy równanie jednorodne:

$$\ddot{q}(t) + 2\alpha\omega\dot{q}(t) + \omega^2q(t) = 0$$

Rozwiązania poszukujemy w postaci:

$$q(t) = e^{-\alpha\omega t} \tilde{q}(t)$$

Po podstawieniu i wykonaniu odpowiednich różniczkowań, otrzymuje się równanie różniczkowe jednorodne określające funkcję  $\tilde{q}(t)$ :

$$\ddot{\tilde{q}}(t) + \omega_d^2 \tilde{q}(t) = 0$$

gdzie

$\omega_d^2 = \omega^2(1 - \alpha^2)$  - jest **tłumioną częstotliwością własną**.

Równanie jest analogiczne do równania drgań nietłumionych. Stąd ostatecznie otrzymuje się rozwiązanie w postaci:

$$q(t) = e^{-\alpha\omega t} (C_1 \sin \omega_d t + C_2 \cos \omega_d t)$$

Jeżeli drgania układu wzbudzone są siłą harmoniczną, to r-nie ruchu ma postać

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = F_s \sin pt + F_c \cos pt$$

Rozpatrzmy drgania ustalone.

Poszukujemy je w postaci harmoniczej o częstotliwości wzbudzenia  $p$ :

$$q(t) = q_s \sin(pt + \varphi) + q_c \cos(pt + \varphi)$$

Po podstawieniu  $q(t) = q_s \sin(pt + \varphi) + q_c \cos(pt + \varphi)$  do równania ruchu

$\ddot{q}(t) + 2\alpha\omega\dot{q}(t) + \omega^2 q(t) = \frac{\omega^2}{k}(F_s \sin pt + F_c \cos pt)$ , otrzymuje się algebraiczny układ dwóch równań:

$$q_s(\omega^2 - p^2) - q_c 2\alpha\omega p = F_s \frac{\omega^2}{k}$$

$$2\alpha\omega p q_s + q_c(\omega^2 - p^2) = F_c \frac{\omega^2}{k}$$

Wprowadzając oznaczenie  $\eta = \frac{p}{\omega}$  **względna częstość wzbudzenia**

gdzie

$p$  – częstość wymuszenia (wzbudzenia)

$\omega$  – częstość drgań własnych

Wówczas poprzedni wzór można przedstawić w postaci:

$$q_s(1 - \eta^2) - q_c \eta \gamma = \frac{F_s}{k}$$

$$q_s \eta \gamma + q_c(1 - \eta^2) = \frac{F_c}{k}$$

Po rozwiązaniu tych równań otrzymuje się:

$$q_s = AF_s + BF_c$$

$$q_c = -BF_s + AF_c$$

gdzie

$A = \frac{1}{k}(1 - \eta^2)v_d^2$  i  $B = \frac{1}{k}\eta\gamma v_d^2$  oznaczają **podatności dynamiczne układu** zależne od częstości wzbudzenia i tłumienia,

gdzie  $v_d$  - jest nazywany **współczynnikiem dynamicznym, współczynnikiem wzmocnienia**

$$v_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\alpha^2\eta^2}}$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\psi = \arctg \frac{\gamma\eta}{1 - \eta^2}$$

$\psi$  - jest nazywane **przesunięciem fazowym**, inaczej **opóźnieniem fazowym** otrzymuje się rozwiązanie

$$q(t) = \frac{v_d}{k} F_s \sin(pt - \psi) + \frac{v_d}{k} F_c \cos(pt - \psi)$$

Amplituda drgań wynosi

$$am\ q = \sqrt{\left(\frac{v_d}{k}F_s\right)^2 + \left(\frac{v_d}{k}F_c\right)^2} = \frac{v_d}{k}\sqrt{(F_s)^2 + (F_c)^2} = \frac{v_d}{k}am\ F$$

Przebieg drgań jest odwzorowaniem przebiegu siły wzbudzającej  $F(t) = F_s \sin pt + F_c \cos pt$  z opóźnieniem fazowym  $\psi = \arctg \frac{\gamma\eta}{1-\eta^2}$  i modyfikacją amplitudy  $am\ q = \frac{v_d}{k}am\ F$ .

Im większy współczynnik dynamiczny  $v_d = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\alpha^2\eta^2}}$ , tym większa jest amplituda drgań, czyli współczynnik dynamiczny jest miarą efektów dynamicznych wymuszenia.

Wykres współczynnika dynamicznego  $v_d$  w zależności od względnej częstości wzbudzenia  $\eta$  nazywa się **krzywą rezonansową**.

Zjawisko czystego rezonansu nie zajdzie, gdyż amplituda przemieszczenia w układach z tłumieniem nie wzrasta do nieskończoności.

Jednak osiąga największe wartości dla  $\eta = \frac{p}{\omega} = 1$ .

Ponadto, w zależności od wartości ilorazu  $\eta$  drgań mówimy o:

$\eta > 1$  – **niskim strojeniu konstrukcji**,

$\eta < 1$  – **wysokim strojeniu konstrukcji**.

**Przypadek  $\eta = 1$**  oznacza że  $p = \omega$  czyli częstość wzbudzenia równa jest częstości własnej układu (**jest to stan rezonansowy**).

Wówczas współczynnik dynamiczny  $v_d = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\alpha^2\eta^2}}$

$$\text{wynosi: } v_r = \frac{1}{2\alpha}$$

a przesunięcie fazowe  $\psi = \arctg \frac{\gamma\eta}{1-\eta^2}$ ,

$$\text{wynosi } \psi_r = \frac{\pi}{2}$$

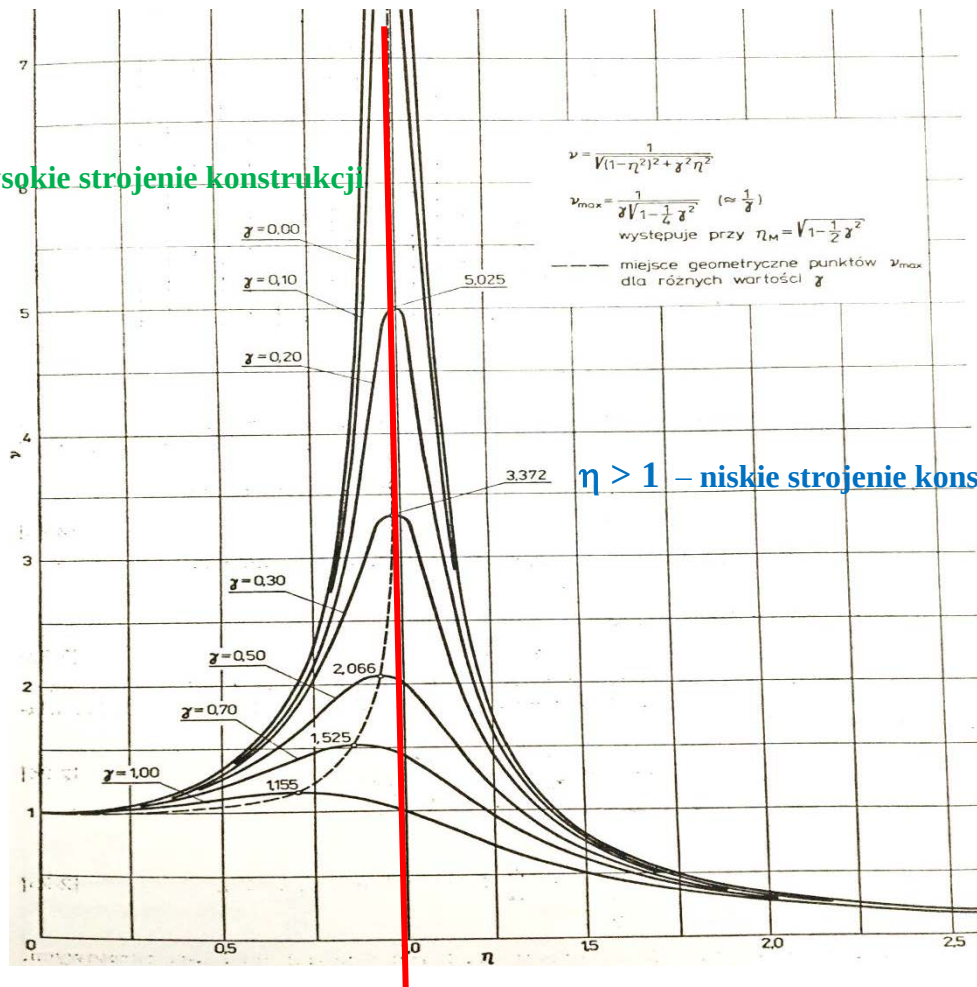
Maksymalną wartość współczynnika dynamicznego  $v_d$  przyjmuje  $v_{max} = \frac{1}{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}$

dla  $\eta = \sqrt{1-2\alpha^2} < 1$ . Dla  $\alpha < 1$   $v_{max} > v_r$ .

Zauważmy, że gdy  $\alpha \ll 1$  różnica między  $v_r$  i  $v_{max}$  są pomijalnie małe.

$$\eta = \frac{p}{\omega} \quad \text{względna częstość wzbudzenia}$$

$\eta < 1$  – wysokie strojenie konstrukcji



$\eta > 1$  – niskie strojenie konstrukcji,

Wykres współczynnika dynamicznego dla układów tłumionych [s.76 Lipiński]

$$v_d = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + \gamma^2 \eta^2}}$$

$\eta < 1$  – wysokie strojenie konstrukcji

$\eta > 1$  – niskie strojenie konstrukcji,

Wykres kąta opóźnienia fazowego [s.29 Langer]

$$\psi = \arctg \frac{\gamma \eta}{1 - \eta^2}$$

## 9. Ocena szkodliwości drgań.

### 9.1. Wpływ drań na konstrukcję.

Wpływ drgań na konstrukcję pojawia się jako dodatkowe naprężenie sumujące się z naprężeniami od obciążeń statycznych, z uwzględnieniem zmęczenia materiału.

#### Uproszczone zasady projektowania z uwzględnieniem zmęczenia

Wszelkiego rodzaju budowle muszą być tak zaprojektowane aby były spełnione warunki:

**A. warunek sztywności**

**B. warunek wytrzymałości**

**C. warunek ekonomii**

Prawidłowo zaprojektowana konstrukcja powinna spełniać podstawowe dwa warunki:

1. Przemieszczenia powinny być mniejsze od pewnych granicznych przemieszczeń dopuszczalnych (dotyczy to zarówno przemieszczeń statycznych, statycznych plus dynamicznych lub tylko dynamicznych).

*Przemieszczenia dynamiczne otrzymuje się w wyniku rozwiązania równań ruchu.*

2. Stan wyężenia konstrukcji powinien być mniejszy od dopuszczalnego stanu wyężenia. (naprężenia powinny być mniejsze od naprężeń dopuszczalnych).

*Stan wyężenia konstrukcji jest sumą wyężenia statycznego powstałego w wyniku działania ciężaru własnego i obciążeń użytkowych oraz wyężenia dynamicznego.*

Naprężenia dynamiczne w wyniku zmian wywołają **zmęczenie materiału** (zmęczenie wysokocyklowe). W wyniku cyklicznych zmian wyężenia **statyczna wytrzymałość materiału**  $R_0$  zmniejsza się wraz ze wzrostem liczby cykli i przy pewnej ustalonej dużej liczbie osiąga wartość  $R_z$  zwanej **wytrzymałością zmęczeniową**.

**Współczynnik zmęczeniowy**  $\zeta = \frac{R_0}{R_z} > 1$

nazywamy **podstawowym współczynnikiem zmęczeniowym dla cyklu symetrycznego**.

$R_0$  - statyczna wytrzymałość materiału

$R_z$  - wytrzymałością zmęczeniową.

W większości przypadków mamy złożone stany naprężeń, statyczno-dynamiczne, charakteryzujące się asymetrią cyklu.

W regularnym cyklu symetrycznym wyróżniamy statyczny składnik naprężenia  $\sigma_s$  oraz amplitudę symetrycznego składnika dynamicznego  $\sigma_d$ :

$\sigma_s$  - *statyczny składnik naprężenia*

$$\sigma_s = \frac{1}{2} |\sigma_{max} + \sigma_{min}|$$

$\sigma_d$  - *amplituda symetrycznego składnika dynamicznego*

$$\sigma_d = \frac{1}{2} |\sigma_{max} - \sigma_{min}|$$

Warunek wytrzymałościowy  $\sigma_{max} < \sigma$

$\sigma$  – dopuszczalne naprężenia [zobacz s. 44 Langer]

$$\sigma = \frac{1}{\zeta} \sigma_0 + \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \sigma_s$$

gdzie  $\sigma_0$  – dopuszczalne naprężenia statyczne.

Warunek wytrzymałości ma postać:

$$|\sigma_{max}| = \sigma_s + \sigma_d \leq \frac{1}{\zeta} \sigma_0 + \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \sigma_s$$

gdzie

$\sigma_0$  - naprężenie obliczeniowe (dopuszczalne) przy obciążeniu statycznym

$\sigma_s$  - statyczny składnik naprężenia

$\sigma_d$  - amplituda symetrycznego składnika dynamicznego

$\zeta$  - podstawowy współczynnik zmęczenia dla cyklu symetrycznego.

Po przekształceniach

$$\sigma_s + \zeta \sigma_d \leq \sigma_0$$

Można zapisać to w innej formie

$$|\sigma_{max}| \leq \frac{\sigma_0}{\zeta_r} = \sigma_{0r}$$

gdzie  $\zeta_r = \frac{\sigma_s + \zeta \sigma_d}{\sigma_s + \sigma_d}$  jest **zredukowanym współczynnikiem zmęczeniowym**, uwzględniającym asymetrię cyklu.

$$1 \leq \zeta_r \leq \zeta$$

Jest to uproszczona teoria wytrzymałości zmęczeniowej, w rzeczywistości zagadnienie jest dużo bardziej złożone.

Do oceny szkodliwości drgań przemysłowych na konstrukcję wprowadzone zostały różne sposoby ich kwalifikacji na podstawie m.in. specjalnych wskaźników i jednostek miary, np.

### Skala oceny drgań Zeller

$$\chi = T \cdot (a\ddot{m})^2 \quad [cm^2/s^3]$$

gdzie

$\chi$  - wskaźnik wstrząsu

$T$  - okres drgań

$a\ddot{m}$  - amplituda przyspieszeń drgań

Dla drgań harmoniczych :

$$q(t) = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a\ddot{m} = a\omega^2 = a \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\chi = 2\pi\omega^3 a^2$$

Często wykorzystywany jest logarytmiczny wskaźnik wstrząsu

$$S = 10 \lg \frac{\chi}{\chi_0} \quad [\text{vibr}]$$

$\chi_0 = 0,1 \quad cm^2/s^3$  jest wartością porównawczą (progiem czułości) przyjętą na podstawie pomiarów.

Dla drgań harmoniczych :

$$S = 10 \lg(20\pi\omega^3 a^2)$$

Na podstawie wskaźnika  $S$  została sporządzona skala oceny szkodliwości drgań w postaci tablicy:

| grupa | $\chi \quad [cm^2/s^3]$ | $S \quad [\text{vibr}]$ | wpływ drgań na konstrukcję |                                   |
|-------|-------------------------|-------------------------|----------------------------|-----------------------------------|
|       |                         |                         | określenie wstrząsu        | skutki                            |
| I     | 0,1-1                   | 0-10                    | ledwo odczuwalne           | -                                 |
| II    | 1-10                    | 10-20                   | słabo odczuwalne           | zarysowania tynku                 |
| III   | 10-100                  | 20-30                   | średnio odczuwalne         | zarysowania muru                  |
| IV    | 100-1 000               | 30-40                   | silne wstrząsy             | odpadanie tynku, pękanie muru     |
| V     | 1 000-10 000            | 40-50                   | bardzo silne wstrząsy      | ciężkie uszkodzenia ścian nośnych |
| VI    | > 10 000                | > 50                    | katastrofalne wstrząsy     | katastrofa budynku                |

### Zobacz np

- PN-B-02170 Ocena szkodliwości drgań przekazywanych przez podłoże na budynki (zastępująca PN-85/B-02170)
- PN-EN 1997-1:2008 Eurokod 7 -- Projektowanie geotechniczne. Część 1: Zasady ogólne (zastępująca PN-80/B-03040 Fundamenty i konstrukcje wsporcze pod maszyny - Obliczenia i projektowanie)
- PN-EN 1991-2:2007. Eurocode 1: Oddziaływania na konstrukcje. Część 2: Obciążenia ruchome mostów. 2003
- PN-EN 1998 Eurokod 8: Projektowanie z uwagi na zagrożenia sejsmiczne. (w j. ang)

## 9.2. Wpływ drań na człowieka.

Opracowano różne metody oceny wpływu drgań na człowieka m.in. w zależności od źródła drgań, m.in. metoda Zellera

$$\Pi = 10 \lg \frac{am\dot{q}}{\dot{q}_0}$$

gdzie

$am\dot{q}$  – amplituda prędkości drgań [cm/s]

$\dot{q}_0 = 0,0316$  cm/s - prędkość drgań na granicy odczuwania ich przez człowieka

Jednostka 1 pal -  $\Pi = 1$  dla  $\dot{q}_0 = 0,0355$  cm/s

Dla drgań harmoniczych :

$$q(t) = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$am\dot{q} = a\omega = a \frac{2\pi}{T}$$

| grupa | liczba palów | intensywność drgań    | charakterystyka drgań i ich skutki                                                                 |
|-------|--------------|-----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| I     | 0-10         | ledwie odczuwalne     | na granicy odczuwalności;<br>zależnie od pozycji ciała                                             |
| II    | 10-20        | dobrze odczuwalne     | odczuwalne wyraźnie<br>w każdej pozycji ciała                                                      |
| III   | 20-30        | silnie odczuwalne     | w budynkach nie do zniesienia dla ludzi,<br>wstrząsy od ruchu ulicznego                            |
| IV    | 30-40        | silne wstrząsy        | drgania od maszyn i ruchu ulicznego uciążliwe dla ludzi;<br>lekkie szkody w budynkach mieszkalnych |
| V     | 40-50        | bardzo silne wstrząsy | silne uszkodzenia w budynkach mieszkalnych                                                         |

### Zobacz np

- PN-B-02171:1988 Ocena wpływu drgań na ludzi w budynkach
- PN-EN 1997-1:2008 Eurokod 7 - Projektowanie geotechniczne. Część 1: Zasady ogólne (zastępująca PN-80/B-03040 Fundamenty i konstrukcje wsporcze pod maszyny - Obliczenia i projektowanie)
- PN-EN 1990:2004 Eurokod - Podstawy projektowania konstrukcji. Dodatek A-1
- PN-N-01354:1991 Drgania - Dopuszczalne wartości przyspieszenia drgań o ogólnym oddziaływaniu na organizm człowieka i metody oceny narażenia (*norma wycofana*)

**Literatura:**

Witold Nowacki „Dynamika budowli” Arkady 1971

Zbigniew Osiński „Teoria drgań”, PWN 1978

Jan Langer „Dynamika budowli”, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej 1980

Janusz Lipiński „Fundamenty pod maszyny”, Arkady 1985

Tadeusz Chmielewski, Zbigniew Zembaty „Podstawy dynamiki budowli”, Arkady 1998

Paweł Śniady „Podstawy stochastycznej dynamiki konstrukcji” Politechnika Wrocławska, 2000

### Przykładowe zadania do samodzielnego rozwiązania

#### Zad.1

Wyznaczyć częstość kołową drgań własnych układu tłumionego.

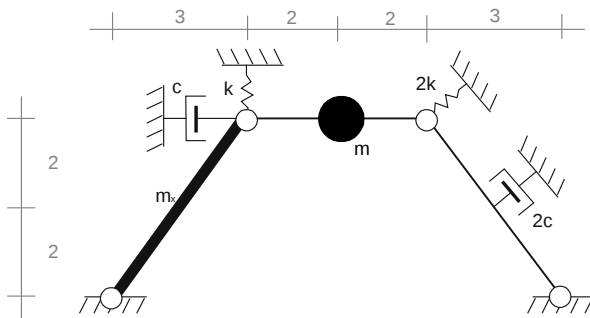
Dane:

$$m = 1000 \text{ kg}$$

$$m_x = 20 \text{ kg/m}$$

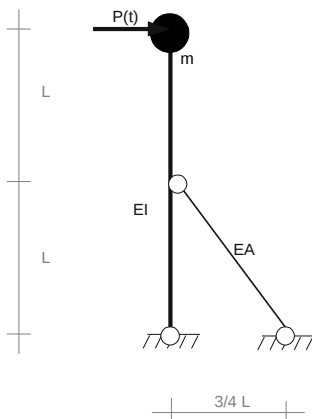
$$c = 20.000 \text{ Ns/m}$$

$$k = 1,8 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$



#### Zad.2

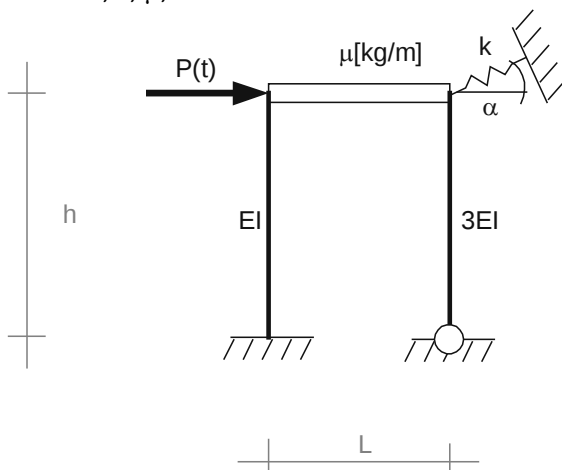
Pręt o charakterystykach przekrojowych  $EI$ ,  $EA = \infty$ ,  $GA = \infty$ , obciążony jest urządzeniem o masie  $m$  oraz siłą wymuszającą  $P(t) = P_0 \sin pt$ . Jaka sztywność osiowa ( $EA$ ) sprężystej więzi podporowej zapewnia pracę w strefie strojenia wysokiego? Kiedy rozwiązanie ma sens (dla jakiego  $p$ )?



#### Zad.3

Napisać równanie ruchu.

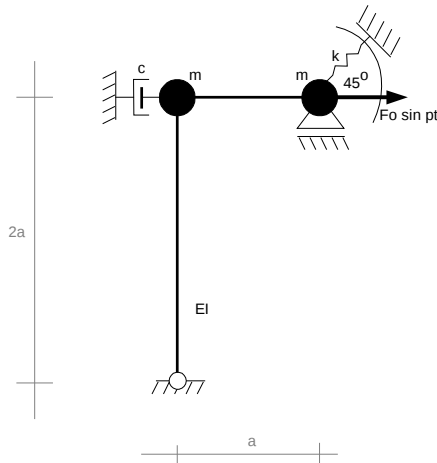
Dane:  $EI$ ,  $k$ ,  $\mu$ ,  $P$



## Zad.4

Wyznaczyć taką sztywność sprężyny  $k$ , aby układ wykonywał drgania rezonansowe, jeśli częstość wymuszenia wynosi  $p = \frac{1}{2}\sqrt{EI/a^3}$ . Obliczyć rezonansowy współczynnik dynamiczny jeśli

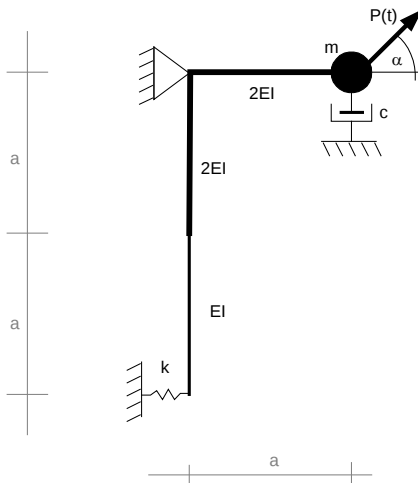
$$c = \frac{1}{3}\sqrt{km}.$$



## Zad.5

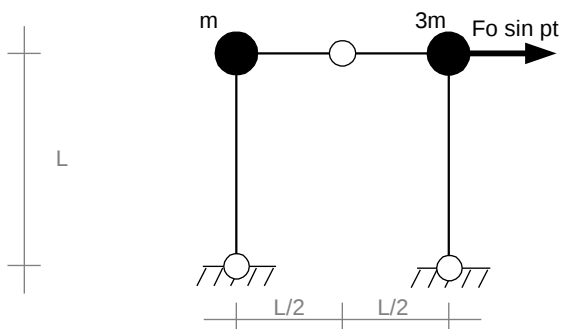
Wyznaczyć wielkość obciążenia kinetostatycznego dla schematu jak niżej, przy następujących danych:

$$EI, L, P_o, m, k = \frac{6}{11}EI/L^3, c = \frac{1}{10}\sqrt{EI/L^3}$$



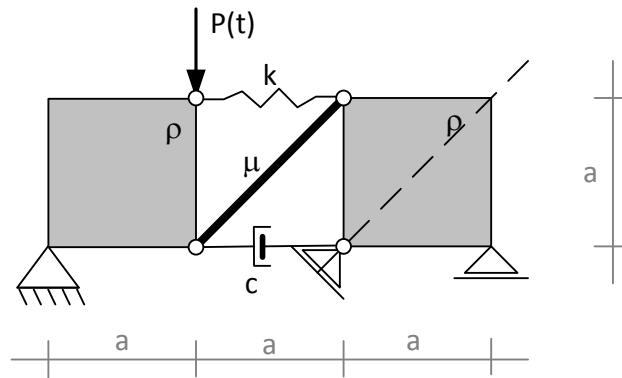
## Zad.6

Wyznaczyć taką postać wymuszenia  $p > 0$ , aby współczynnik dynamiczny  $v$  był równy jedności. Tłumienie pominąć.

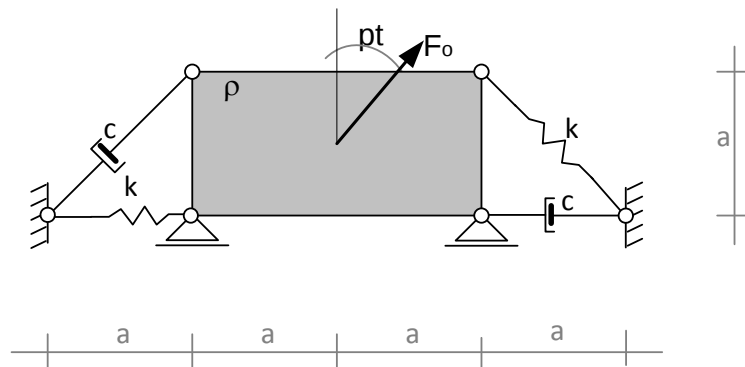


Zad.7

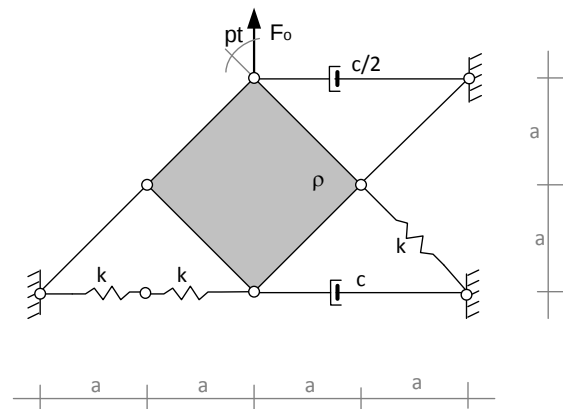
Napisać równanie ruchu.

Dane:  $\rho, c, k, \mu, P, a$ 

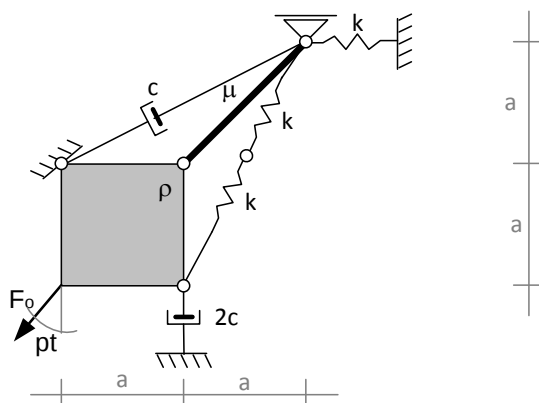
Zad.8

Wyznaczyć taką wartość parametru tłumienia  $c$ , aby rezonansowy współczynnik dynamiczny był równy 2.Dane:  $\rho, k, F_0, p, a$ 

Zad.9

Wyznaczyć taką wartość parametru tłumienia  $c$ , aby rezonansowy współczynnik dynamiczny był równy 2.Dane:  $\rho, k, F_0, p, a$ 

Zad.10



Napisać równanie ruchu.

Dane:  $\rho, c, k, \mu, F_0, p, a$