

ZADANIE – Układ zbudowany z doskonale sztywnych tarcz

8.3 Napisac macierzowe rownanie ruchu. Jako wspolrzedne przy-
jac mozliwe translacje punktow
A i B. Narysowac formy drgal
wlasnych.

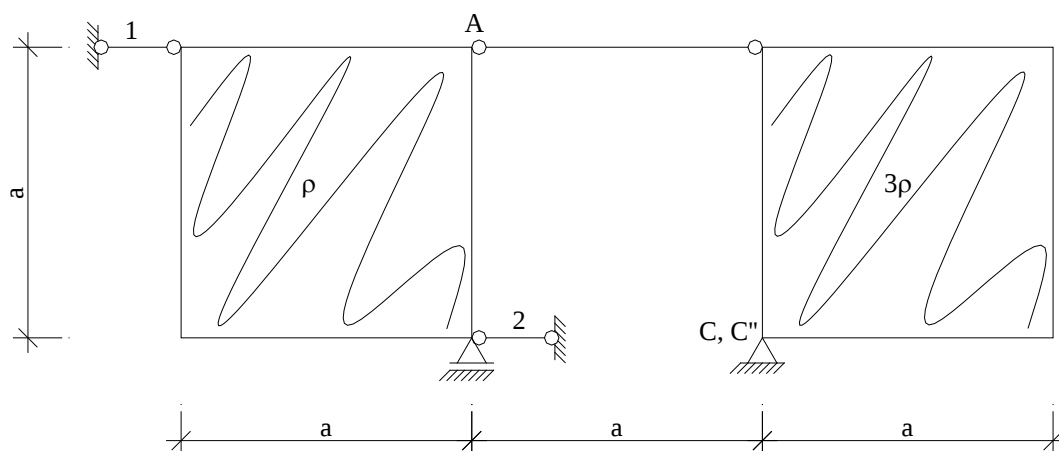
Dane: $g, a, c, k_{\Delta}, F_0, p,$
 $k_{1\Delta} = k_{2\Delta} = k_{\Delta}, \mu = ga,$
 $p = \sqrt{k_{\Delta}/ga^2}, c = \sqrt{k_{\Delta}ga^2}.$
 Dla przypadku $k_{2\Delta} = \infty$ napisac rownanie ruchu i podac ω i γ .

8.1. Dobór współrzędnych uogólnionych

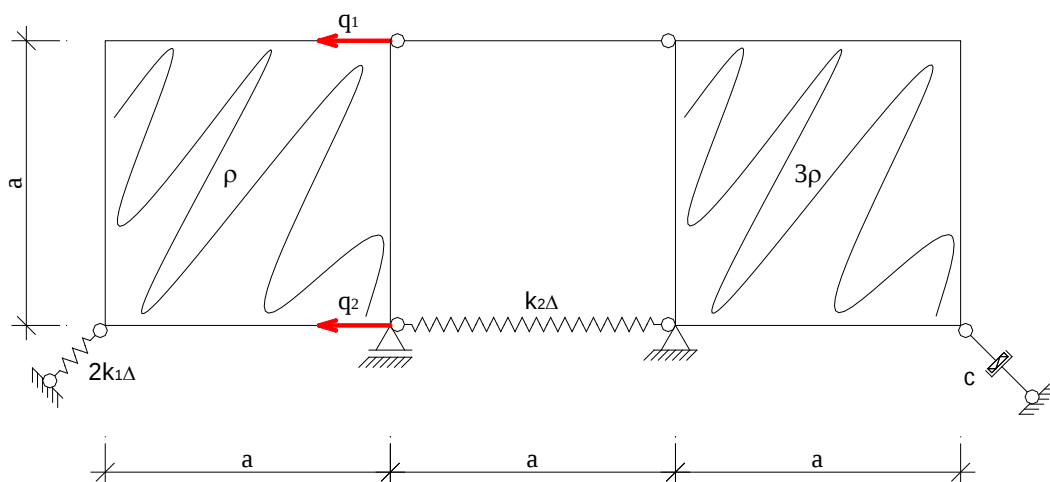
Analizowany układ ma dwa dynamiczne stopnie swobody, które wynikają z prostej relacji (dla układów o sztywnych tarczach)

$$d = 3t - e = 3 \cdot 3 - 7 = 2$$

Współrzędne uogólnione przyjęto analogicznie jak w przypadku schematów kinematycznych wykorzystywanych przy metodzie przemieszczeń

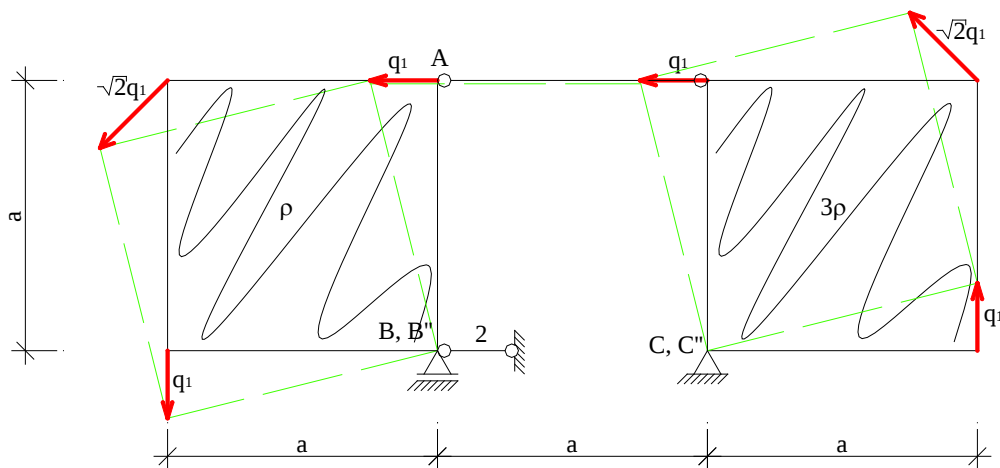


Kierunki więzi elementarnych dołączonych do układu wyjściowego (nr 1 i 2) odpowiadają współrzędnym uogólnionym

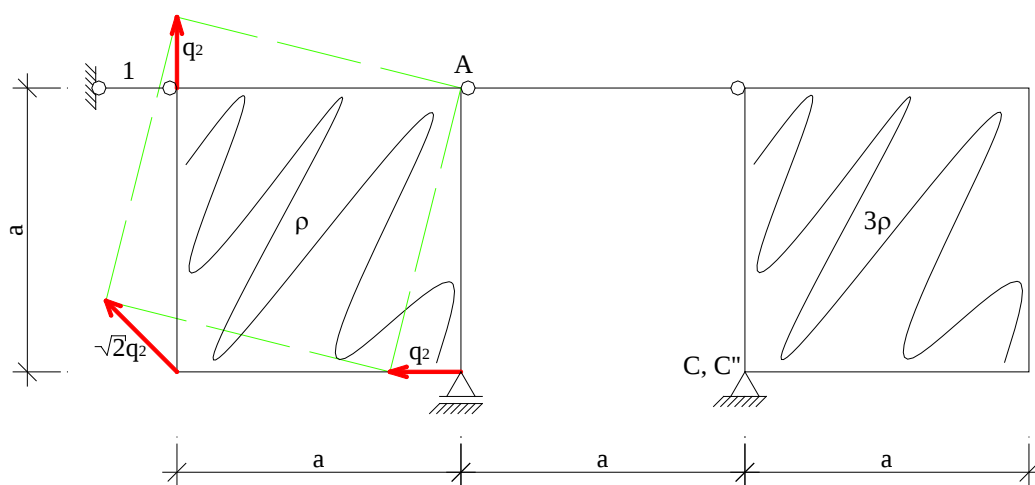


8.2. Plany przemieszczeń jednostkowych

Pierwszy stan jednostkowy

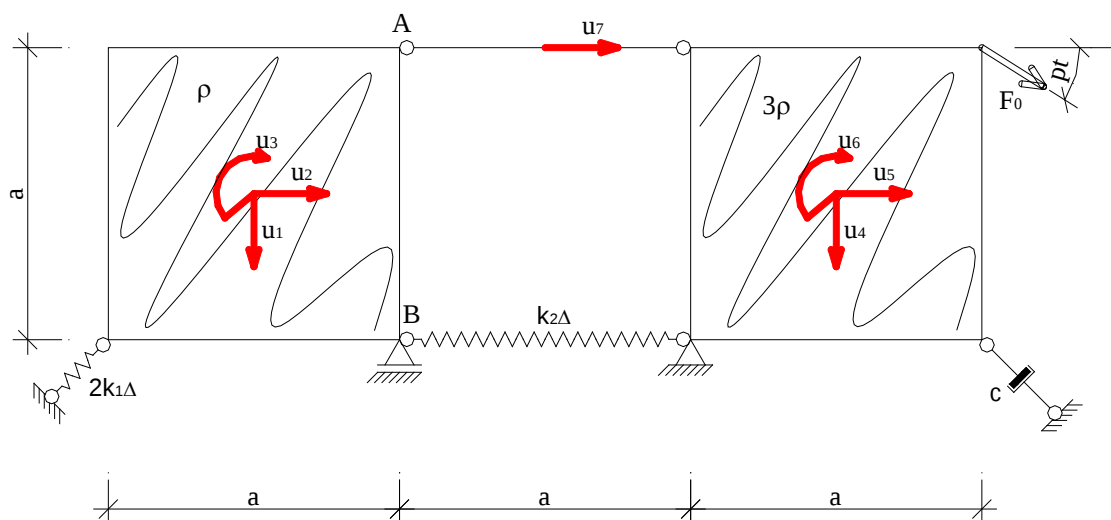


Drugi stan jednostkowy



8.3. Wyznaczenie macierzy bezwładności

Transformacja współrzędnych uogólnionych na lokalne



Na podstawie planów przemieszczeń ustalono współczynniki transformacji

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ -0,5 & 0 \\ -0,5 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Diagonała mas

$$\{m\} = \text{diag}\left(\rho a^2, \rho a^2, \frac{1}{6}\rho a^4, 3\rho a^2, 3\rho a^2, 0,5\rho a^4, \rho a^2\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \rho a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}\rho a^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\rho a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\rho a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5\rho a^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho a^2 \end{bmatrix}$$

Macierz bezwładności

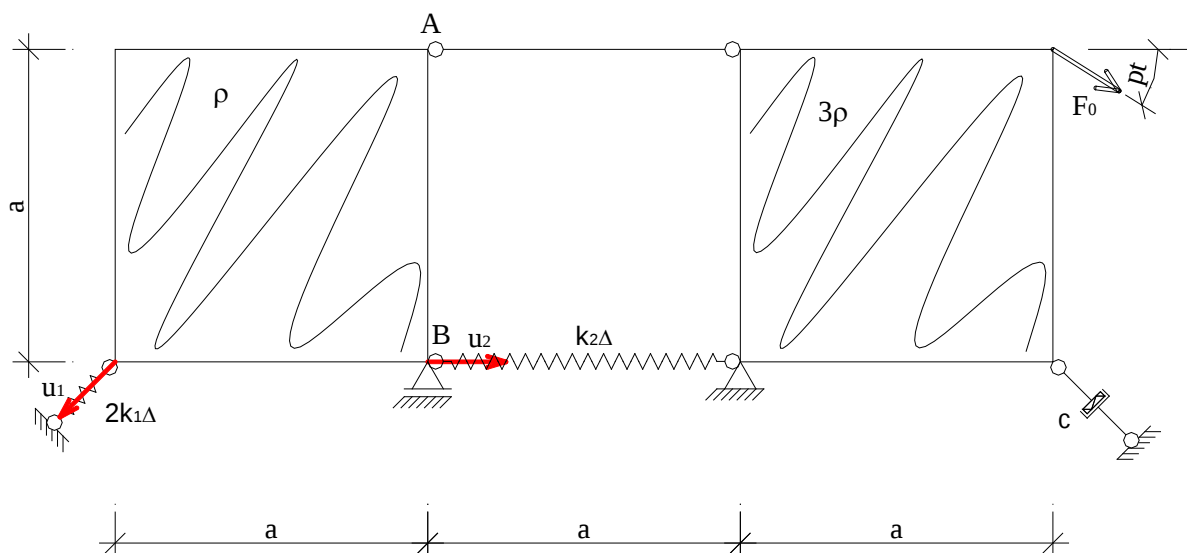
$$\begin{aligned}
 B &= A_m^T \{m\} A_m = \\
 &= \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ -0,5 & 0 \\ -0,5 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \rho a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \rho a^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\rho a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\rho a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5\rho a^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ -0,5 & 0 \\ -0,5 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 3,66667 \rho a^2 & -0,16667 \rho a^2 \\ -0,16667 \rho a^2 & 0,66667 \rho a^2 \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 3,66667 \rho a^2 & -0,16667 \rho a^2 \\ -0,16667 \rho a^2 & 0,66667 \rho a^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

8.4. Wyznaczenie macierzy tłumienia

Z planów przemieszczeń wynika, że na kierunku więzi tłumiącej tylko w pierwszym stanie jednostkowym jest niezerowe przemieszczenie równe dokładnie q_1 , stąd

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \frac{1}{2} c \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \dot{q}_1 \right)^2 \\
 \Phi &= \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T C \dot{\vec{q}} \quad \Rightarrow \quad C = \begin{bmatrix} \frac{c}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

8.5. Wyznaczenie macierzy sztywności



Transformacja współrzędnych uogólnionych na lokalne

Na podstawie planów przemieszczeń ustalono współczynniki transformacji

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Diagonała więzi sprężystych

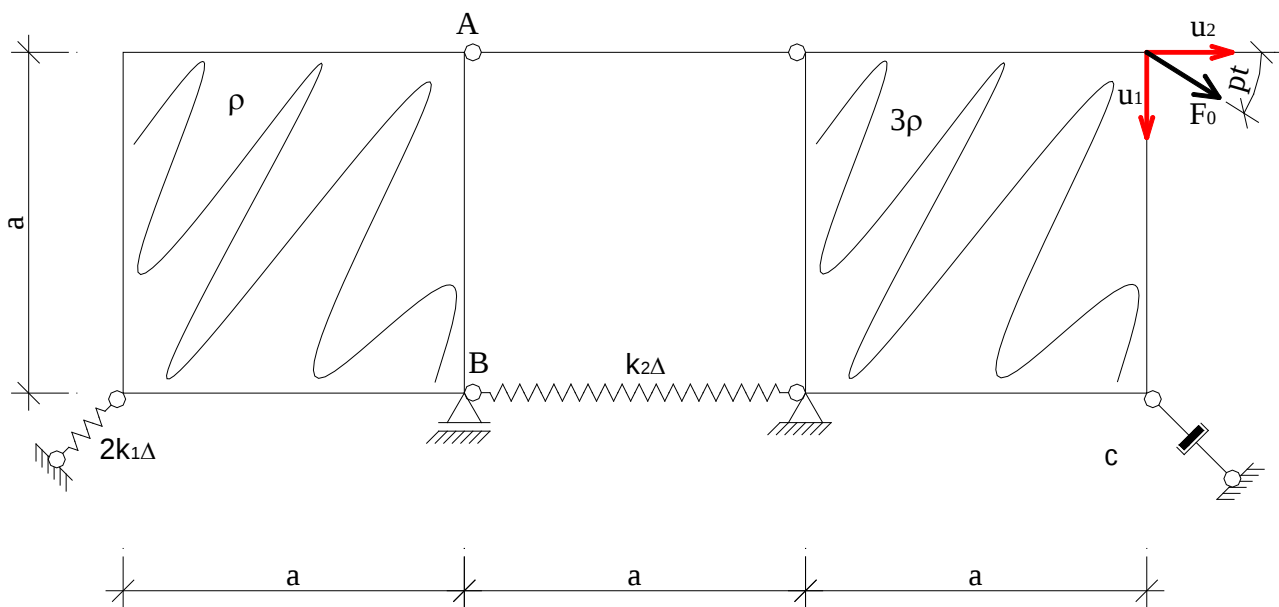
$$\{k\} = \text{diag}(k_{1\Delta}, k_{2\Delta}) = \begin{bmatrix} 2k_{1\Delta} & 0 \\ 0 & k_{2\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_{\Delta} & 0 \\ 0 & k_{\Delta} \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności

$$K = A_s^T \{k\} A_s = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 2k_{\Delta} & 0 \\ 0 & k_{\Delta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\Delta} & 0 \\ 0 & k_{\Delta} \end{bmatrix}$$

8.6. Wyznaczenie wektora wzbudzenia

Transformacja współrzędnych uogólnionych na lokalne



Na podstawie planów przemieszczeń ustalono współczynniki transformacji

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Wektor składowych sił wzbudzających

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} F_0 \sin(pt) \\ F_0 \cos(pt) \end{bmatrix}$$

Praca sił wzbudzających

$$L = \bar{u}^T \bar{P}(t) = \bar{q}^T \cdot A_p^T \cdot \bar{P}(t) = \bar{q}^T \bar{F}(t)$$

$$\bar{F}(t) = A_p^T \cdot \bar{P}(t)$$

$$\bar{F}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_0 \sin(pt) \\ F_0 \cos(pt) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_0 \cos(pt) - F_0 \sin(pt) \\ 0 \end{bmatrix}$$

8.7. Macierzowe równanie ruchu

$$B \ddot{\bar{q}}(t) + C \dot{\bar{q}}(t) + K \bar{q}(t) = \bar{F}(t)$$

Stąd

$$\begin{bmatrix} 3,66667 \rho a^2 & -0,16667 \rho a^2 \\ -0,16667 \rho a^2 & 0,66667 \rho a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_\Delta & 0 \\ 0 & k_\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_0 \cos(pt) - F_0 \sin(pt) \\ 0 \end{bmatrix}$$

8.5. Rozwiązanie zagadnienia własnego

Równanie drgań własnych

$$B \ddot{\bar{q}}(t) + K \bar{q}(t) = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} 3,66667 \rho a^2 & -0,16667 \rho a^2 \\ -0,16667 \rho a^2 & 0,66667 \rho a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_\Delta & 0 \\ 0 & k_\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

Równanie zagadnienia własnego

$$\det(B^{-1}K - \lambda I) = 0$$

$$\omega = \sqrt{\lambda}$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 3,66667 \rho a^2 & -0,16667 \rho a^2 \\ -0,16667 \rho a^2 & 0,66667 \rho a^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_{\Delta} & 0 \\ 0 & k_{\Delta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\lambda^2 - 1,7931 \frac{k_{\Delta}}{\rho a^2} \lambda + 0,413793 \left(\frac{k_{\Delta}}{\rho a^2} \right)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 0,272042 \frac{k_{\Delta}}{\rho a^2}$$

$$\lambda_2 = 1,52106 \frac{k_{\Delta}}{\rho a^2}$$

Stąd częstości własne wynoszą odpowiednio

$$\omega_1 = \sqrt{0,272042 \frac{k_{\Delta}}{\rho a^2}} = 0,521577 \sqrt{\frac{k_{\Delta}}{\rho a^2}}$$

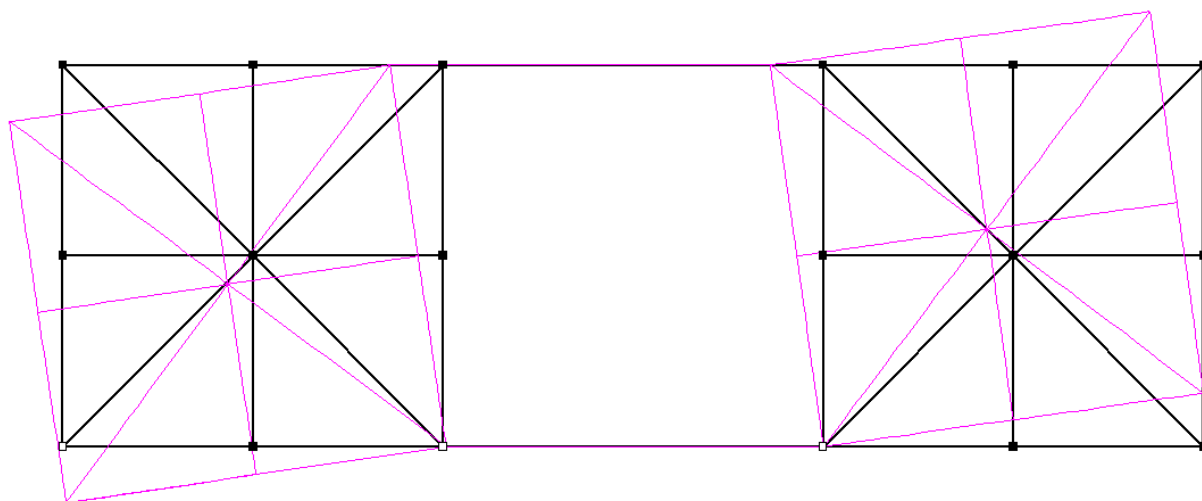
$$\omega_2 = \sqrt{1,52106 \frac{k_{\Delta}}{\rho a^2}} = 1,23331 \sqrt{\frac{k_{\Delta}}{\rho a^2}}$$

Wektory własne

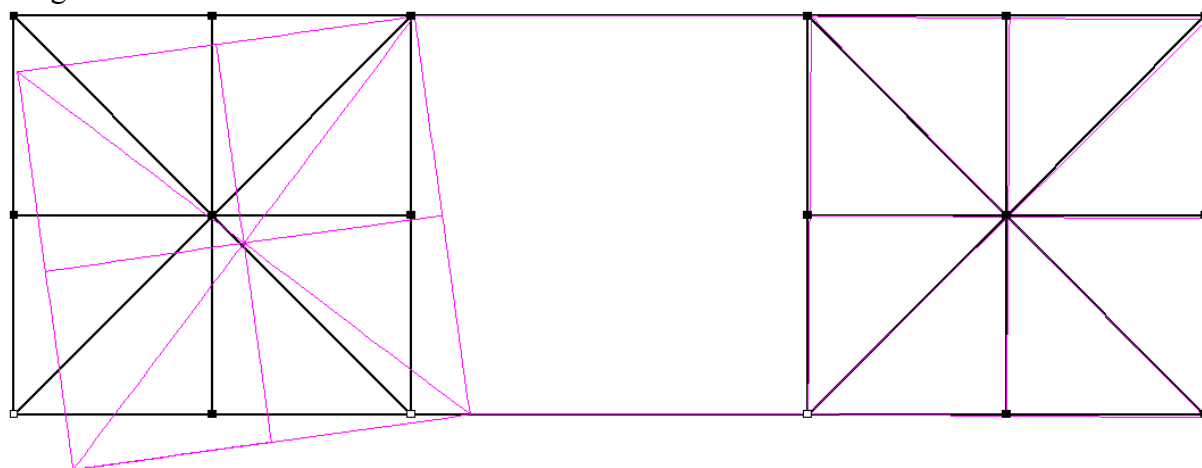
$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3,66667 \rho a^2 & -0,16667 \rho a^2 \\ -0,16667 \rho a^2 & 0,66667 \rho a^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_{\Delta} & 0 \\ 0 & k_{\Delta} \end{bmatrix} - 0,272042 \frac{k_{\Delta}}{\rho a^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{k_{\Delta}}{\rho a^2} \begin{bmatrix} 0,00381966 & 0,0689655 \\ 0,0689655 & 1,2452 \end{bmatrix} \\ & \text{adj} \left(\frac{k_{\Delta}}{\rho a^2} \begin{bmatrix} 0,00381966 & 0,0689655 \\ 0,0689655 & 1,2452 \end{bmatrix} \right) = \frac{k_{\Delta}}{\rho a^2} \begin{bmatrix} 1,2452 & -0,0689655 \\ -0,0689655 & 0,00381966 \end{bmatrix} \\ & \bar{w}_1 = \begin{bmatrix} 1,0 \\ -0,0553 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3,66667 \rho a^2 & -0,16667 \rho a^2 \\ -0,16667 \rho a^2 & 0,66667 \rho a^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_{\Delta} & 0 \\ 0 & k_{\Delta} \end{bmatrix} - 1,52106 \frac{k_{\Delta}}{\rho a^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{k_{\Delta}}{\rho a^2} \begin{bmatrix} -1,2452 & 0,0689655 \\ 0,0689655 & -0,00381966 \end{bmatrix} \\ & \text{adj} \left(\frac{k_{\Delta}}{\rho a^2} \begin{bmatrix} -1,2452 & 0,0689655 \\ 0,0689655 & -0,00381966 \end{bmatrix} \right) = \frac{k_{\Delta}}{\rho a^2} \begin{bmatrix} -0,00381966 & -0,0689655 \\ -0,0689655 & -1,2452 \end{bmatrix} \\ & \bar{w}_2 = \begin{bmatrix} -0,0553 \\ -1,0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pierwsza forma własna



Druga forma własna



8.6. Równanie ruchu układu w przypadku $k_{2\Delta} = \infty$

W przypadku $k_{2\Delta} = \infty$ druga współrzędna uogólniona nie ma racji bytu, a układ staje się układem o jednym dynamicznym stopniu swobody, którego drgania opisuje współrzędna q_1 (pierwszy plan przemieszczeń).

Równanie ruchu przybiera postać

$$3,66667 \rho a^2 \ddot{q}_1 + \frac{c}{2} \dot{q}_1 + k_{\Delta} q_1 = -F_0 \cos(pt) - F_0 \sin(pt)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} = \sqrt{\frac{k_{\Delta}}{3,66667 \rho a^2}} = 0,5222 \sqrt{\frac{k_{\Delta}}{\rho a^2}}$$

$$\gamma = \frac{\tilde{c}}{\sqrt{\tilde{k} * \tilde{m}}} = \frac{\frac{c}{2}}{\sqrt{k_{\Delta} * 3,66667 \rho a^2}} = 0,26112 \frac{c}{\sqrt{k_{\Delta} \rho a^2}}$$