ANALIZA
MATEMATYCZNA 2

Marian Gewert   Zbigniew Skoczylas

ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Definicje, twierdzenia, wzory

Wydanie dziewiętnaste zmienione

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2019

Marian Gewert
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marian.gewert@pwr.edu.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Skład wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 978–83–62780–64–8

Wydanie XIX zmienione, Wrocław 2019
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS, sp. z o.o., A.Bieroński, P.Bieroński, sp. jawna

Spis treści

Wstęp

Niniejsza książka jest pierwszą częścią zestawu podręczników do Analizy matematycznej 2. Pozostałymi częściami są zbiór zadań pt. *„Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania”* oraz opracowanie pt. *„Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy”*. Podręczniki te są przeznaczone głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać także studenci uczelni ekonomicznych, pedagogicznych i rolniczych oraz niektórych wydziałów uniwersytetów.

Materiał zawarty w książce obejmuje całki niewłaściwe, szeregi liczbowe, ciągi i szeregi funkcyjne, rachunek różniczkowy i całkowy funkcji wielu zmiennych wraz z zastosowaniami. Wszystkie zagadnienia teoretyczne zakończone są ćwiczeniami, przy czym początkowe z nich są z reguły najprostsze. Odpowiedzi do ćwiczeń umieszczone są na końcu podręcznika. Fragmenty materiału oznaczone gwiazdką nieznacznie wykraczają poza standardowy program przedmiotu. W ten sam sposób oznaczono trudniejsze ćwiczenia. Uzupełniający materiał oraz trudniejsze ćwiczenia dołączono z myślą o studentach, którzy chcą pogłębić swoje wiadomości z analizy matematycznej. Studentów tych zachęcamy do zapoznania się z książką *„Studencki konkurs matematyczny”*, która jest zbiorem trudnych i nietypowych zadań z algebry oraz analizy.

Przykłady ze wzorcowymi rozwiązaniami ilustrujące materiał teoretyczny z tego podręcznika umieszczono w drugiej części zestawu pt. *„Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania”*. Tam też można znaleźć dużą liczbę zadań do samodzielnej nauki.

Ćwiczenia z tej książki oraz zadania z drugiej części zestawu są podobnych typów i mają ten sam stopień trudności jak zadania, które zwykle pojawiają się na kolokwiach i egzaminach. Zadania, które w poprzednich latach studenci rozwiązywali na sprawdzianach, są umieszczone w trzeciej części zestawu.

Do obecnego wydania dodano wiele nowych ćwiczeń i rysunków oraz poprawiono zauważone błędy i usterki.

Serdecznie dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej za uwagi o wcześniejszych wydaniach książki. Dziękujemy również naszym Studentom za wskazanie błędów w odpowiedziach do ćwiczeń.

Uprzejmie prosimy Czytelników o przesyłanie uwag o podręczniku oraz informacji o dostrzeżonych błędach i usterkach.

Marian Gewert *Zbigniew Skoczylas*

1. Całki niewłaściwe

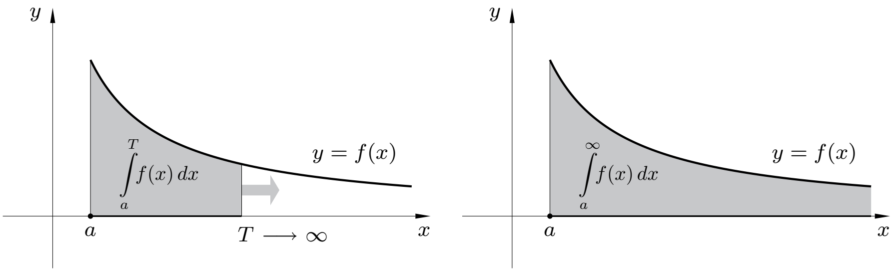
W tym rozdziale przyjmujemy, że rozważane tu funkcje są całkowalne na dowolnym przedziale domkniętym zawartym w ich dziedzinie.

1. Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju

Definicja 1.1. *(całka na półprostej)*
Niech funkcja f będzie określona na przedziale $[a, \infty)$. Całkę funkcji f na $[a, \infty)$ określamy wzorem:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \int\limits_a^T f(x)\,dx.$$

Jeżeli granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa, to mówimy, że całka jest *zbieżna*. Jeżeli granica jest równa ∞ lub $-\infty$, to mówimy, że całka jest *rozbieżna odpowiednio do* ∞ lub $-\infty$. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest *rozbieżna.*

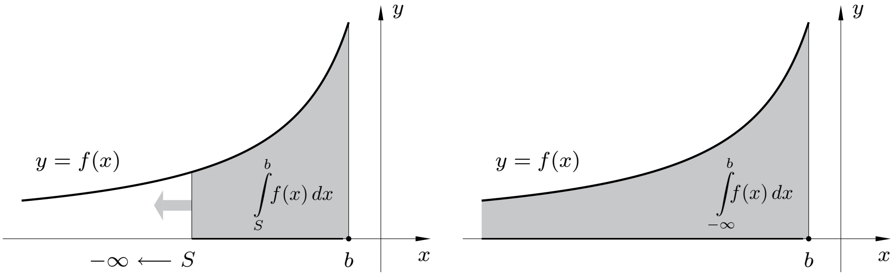


Rys. 1.1. Ilustracja całki na półprostej $[a, \infty)$

Analogicznie określa się całkę na przedziale $(-\infty, b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{S\to-\infty} \int\limits_S^b f(x)\,dx.$$

Uwaga. Jeżeli funkcja f jest nieujemna na przedziale $[a, \infty)$, to całka tej funkcji na tym przedziale jest zbieżna albo rozbieżna do ∞. Podobnie dla całki na przedziale $(-\infty, b]$.



Rys. 1.2. Ilustracja całki na półprostej $(-\infty, b]$

Ćwiczenie 1.2. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek (dla całek zbieżnych obliczyć ich wartości):

(a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$; (b) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$; (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+1}$; (d) $\displaystyle\int_\pi^\infty \sin x\,dx$;

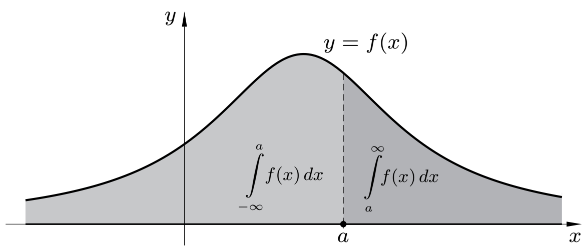
(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-9} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$; (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$; (g*) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}}$; (h*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$.

Definicja 1.3. *(całka na prostej)*

Niech funkcja f będzie określona na przedziale $(-\infty, \infty)$. Całkę funkcji f na prostej $(-\infty, \infty)$ definiujemy wzorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx,$$

gdzie a oznacza dowolną liczbę rzeczywistą. Zbieżność całki po lewej stronie znaku równości ustalamy w zależności od zbieżności całek po prawej stronie. Jeżeli obie całki po prawej są zbieżne, to mówimy, że całka po lewej jest zbieżna. Jeżeli jedna z całek po prawej jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞, a druga jest zbieżna albo rozbieżna odpowiednio do $-\infty$ lub ∞, to mówimy, że całka po lewej jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka po lewej jest rozbieżna.



Rys. 1.3. Ilustracja całki na prostej

Uwaga. Jeżeli całka na przedziale $(-\infty, \infty)$ jest zbieżna dla pewnego $a \in \mathbb{R}$, to jest zbieżna dla dowolnego a i jej wartość nie zależy od a. Całki po przedziałach nieograniczonych $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$ nazywamy *całkami niewłaściwymi pierwszego rodzaju*. Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju są liniowe. Na koniec zauważmy, że jeżeli funkcja f jest nieujemna na przedziale $(-\infty, \infty)$, to całka niewłaściwa funkcji f na prostej jest zbieżna albo rozbieżna do ∞.

Ćwiczenie 1.4. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych (dla całek zbieżnych obliczyć ich wartości):

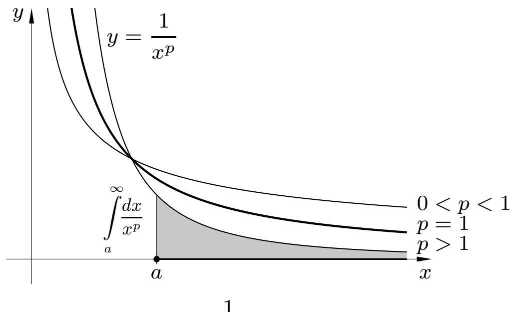
(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}$; (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+1}$; (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{2x}}$; (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$;

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx$; (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{x}\sin x\,dx$; (g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{|x|}}$; (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(3^{x}-2^{-x}\right)dx$.

FAKT 1.5. *(o zbieżności całek* $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$*)*

Całka niewłaściwa $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ $(a > 0)$ jest zbieżna dla $p > 1$ i rozbieżna do ∞ dla $0 < p \leqslant 1$.

Uwaga. Analogiczny fakt jest prawdziwy także dla całek niewłaściwych $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} \frac{dx}{x^p}$ $(b < 0)$, o ile funkcja podcałkowa jest poprawnie określona.



Rys. 1.4. Wykresy funkcji $y = \dfrac{1}{x^p}$ dla różnych wartości parametru $p > 0$

Ćwiczenie 1.6. Korzystając z powyższego faktu zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$; (b) $\displaystyle\int_8^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$; (c) $\displaystyle\int_{-1}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$;

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{2x+5}\right)^4}$; (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-2)^3}}$; (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt{|x-1|+2}}$.

Ćwiczenie 1.7. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{p^x}$ $(a \in \mathbb{R})$ w zależności od parametru $p > 0$.

Ćwiczenie* 1.8. Funkcję *gamma*, która jest uogólnieniem silni, określamy wzorem

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\,dx, \quad \text{gdzie } p > 0.$$

Obliczyć $\Gamma(1)$ i następnie pokazać, że $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ dla $p > 0$ oraz $\Gamma(n) = (n-1)!$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 1.9. *(wartość główna całki niewłaściwej pierwszego rodzaju)*
Wartość główną całki niewłaściwej pierwszego rodzaju funkcji f na $(-\infty, \infty)$ definiujemy wzorem

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^T f(x)\,dx.$$

Jeżeli granica po prawej stronie równości nie istnieje, to mówimy, że całka niewłaściwa nie ma wartości głównej.

Uwaga. Jeżeli całka niewłaściwa na $(-\infty, \infty)$ jest zbieżna do w, to wartość główna całki także się równa w. Z drugiej strony całka rozbieżna może mieć wartość główną.

Ćwiczenie 1.10. Wyznaczyć wartości główne całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

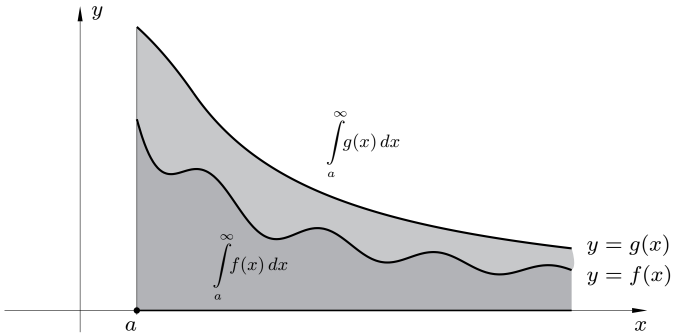
(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+1}$; (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{e^x + e^{-x}}\,dx$; (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^3\,dx$; (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x}\,dx$.

2. Kryteria zbieżności całek niewłaściwych pierwszego rodzaju

TWIERDZENIE 2.1. *(kryterium porównawcze zbieżności/rozbieżności całek)*
Niech funkcje f i g spełniają dla każdego $x \in [a, \infty)$ nierówności $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Wówczas:

(**a**) jeżeli całka $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ jest zbieżna, to całka $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ także jest zbieżna;

(**b**) jeżeli całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ jest rozbieżna do ∞, to całka $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ także jest rozbieżna do ∞.



Rys. 2.1. Ilustracja kryterium porównawczego zbieżności całek niewłaściwych

Uwaga. Twierdzenie pozostanie prawdziwe, gdy nierówności w założeniu są spełnione dla każdego $x \in [a^*, \infty)$, gdzie $a^* > a$. Analogiczne twierdzenie zachodzi dla funkcji niedodatnich f i g. Ponadto prawdziwe są podobne twierdzenia dla całek niewłaściwych na półprostej $(-\infty, b]$.

Ćwiczenie 2.2. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

(a) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$; (b) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{dx}{e^x+x}$; (c) $\displaystyle\int\limits_4^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1}$;

(d) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{arc\,tg} x^2\,dx}{x^2+1}$; (e) $\displaystyle\int\limits_{2\pi}^\infty \frac{(2+\sin x)\,dx}{\sqrt{x}}$; (f) $\displaystyle\int\limits_{2\pi}^\infty \frac{(x+\sin x)\,dx}{x^2-1}$;

(g*) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^1 e^{-x^2}\,dx$; (h*) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{4^x\,dx}{x+1}$; (i*) $\displaystyle\int\limits_\pi^\infty \frac{dx}{\cos x-\sqrt{3}}$.

TWIERDZENIE 2.3. *(kryterium ilorazowe zbieżności/rozbieżności całek)*
Niech funkcje f i g będą dodatnie (ujemne) na półprostej $[a, \infty)$ oraz niech spełniają warunek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \text{ gdzie } 0 < k < \infty.$$

Wówczas całki $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne do ∞ $(-\infty)$.

Uwaga. Prawdziwe są także analogiczne twierdzenia dla całek niewłaściwych na półprostej $(-\infty, b]$.

Ćwiczenie 2.4. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

(a) $\displaystyle\int\limits_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$; (b) $\displaystyle\int\limits_3^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^6-10x}}$; (c) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{e^x\,dx}{x\,(e^x-1)}$;

(d) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{-\pi} \frac{x\,dx}{x^3+\sin x}$; (e) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-x}}$; (f) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{-\pi} e^x\cos\frac{1}{x}\,dx$;

(g*) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{(x+1)^x\,dx}{x^{x+2}}$; (h*) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\ln\left(1+3^{-x}\right)\,dx}{\ln\left(1+2^{-x}\right)}$; (i*) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^{3x}\,dx}{e^x+1}$.

3. Zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych pierwszego rodzaju

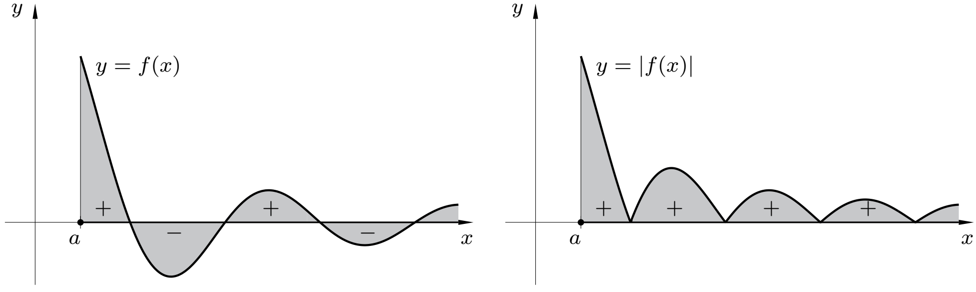
Definicja 3.1. *(zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych pierwszego rodzaju)*
Mówimy, że całka niewłaściwa pierwszego rodzaju funkcji f jest *zbieżna bezwzględnie*, gdy całka niewłaściwa funkcji $|f|$ jest zbieżna.

Ćwiczenie 3.2. Zbadać zbieżność bezwzględną całek niewłaściwych:

(a) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{\sin 2x\,dx}{x^2+1}$; (b) $\displaystyle\int\limits_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$; (c) $\displaystyle\int\limits_\pi^\infty \frac{\sin x\,dx}{x^3}$; (d*) $\displaystyle\int\limits_{10}^\infty \frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}\,dx}{x}$.

TWIERDZENIE 3.3. *(o zbieżności całek zbieżnych bezwzględnie)*
Jeżeli całka niewłaściwa jest zbieżna bezwzględnie, to jest zbieżna. Ponadto

$$\left|\int\limits_a^\infty f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx.$$



Rys. 3.1. Ilustracja twierdzenia o zbieżności całek niewłaściwych zbieżnych bezwzględnie

Uwaga. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla pozostałych rodzajów całek niewłaściwych pierwszego rodzaju. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Np. całka niewłaściwa funkcji $f(x) = (\sin x)/x$ na przedziale $[\pi, \infty)$ jest zbieżna, ale nie jest zbieżna bezwzględnie.

Ćwiczenie 3.4. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną całek niewłaściwych:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty x \sin x \, dx$; (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos 2x \, dx}{e^x + 1}$; (c) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x \sin x \, dx}{\left(x^2+4\right)^2}$;

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2^x \sin x \, dx}{5^x + 3^x \cos x}$; (e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-2x} \sin x \, dx}{2 + \cos x}$; (f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(\sin x + \cos x) \, dx}{\left(x^2+9\right)^2}$;

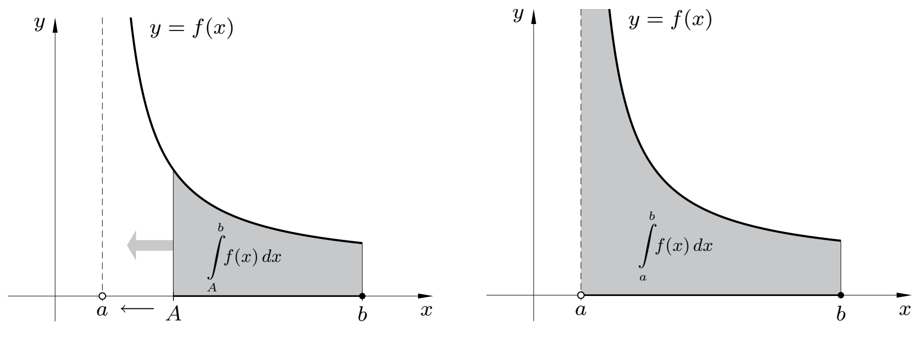
(g*) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \, dx}{x}$; (h*) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x \sin^5 x \, dx$; (i*) $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 \, dx$.

4. Całki niewłaściwe drugiego rodzaju

Definicja 4.1. *(całka z funkcji nieograniczonej)*
Niech funkcja f określona na przedziale $(a, b]$ będzie nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a. Całkę funkcji f na przedziale $(a, b]$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{A \to a^+} \int_A^b f(x) \, dx.$$

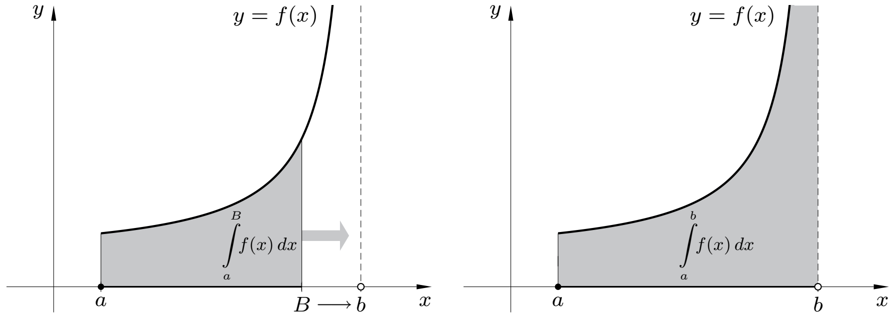
Jeżeli granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa, to mówimy, że całka jest *zbieżna*. Jeżeli granica jest równa ∞ lub $-\infty$, to mówimy, że całka jest *rozbieżna* odpowiednio do ∞ lub $-\infty$. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest *rozbieżna*.



Rys. 4.1. Ilustracja całki z funkcji nieograniczonej na $(a, b]$

Analogicznie definiuje się całkę funkcji f określonej na przedziale $[a, b)$ i nieograniczonej tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu b :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{B \to b^-} \int_a^B f(x)\,dx.$$



Rys. 4.2. Ilustracja całki z funkcji nieograniczonej na $[a, b)$

Uwaga. Jeżeli funkcja f jest nieujemna na przedziale $(a, b]$ albo $[a, b)$, to całka $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ jest zbieżna albo rozbieżna do ∞. Jeżeli funkcja f jest ograniczona na przedziale $(a, b]$, to całka $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ wyznaczona według powyższej definicji jest zbieżna i jej wartość pokrywa się ze zwykłą całką oznaczoną obliczoną z definicji (wartość $f(a)$ przyjmujemy dowolnie). Np. całka $\int\limits_0^1 \sin\dfrac{1}{x}\,dx$ jest zbieżna. Podobnie jest dla funkcji określonej na przedziale $[a, b)$.

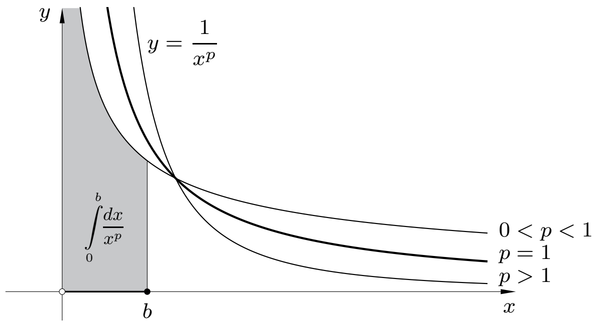
Ćwiczenie 4.2. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek (dla całek zbieżnych obliczyć ich wartości):

(a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^2}$; (c) $\displaystyle\int_0^e \ln x\,dx$; (d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$;

(e) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; (f) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,dx$; (g) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$; (h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x-2)\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

FAKT 4.3. *(o zbieżności całek* $\int\limits_0^b \frac{dx}{x^p}$*)*

Całka $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{x^p}$ $(b > 0)$ jest zbieżna dla $0 < p < 1$ i rozbieżna do ∞ dla $p \geqslant 1$.



Rys. 4.3. Wykresy funkcji $y = \dfrac{1}{x^p}$ dla różnych wartości parametru $p > 0$

Uwaga. Analogiczny fakt jest prawdziwy także dla całek $\displaystyle\int_a^0 \frac{dx}{x^p}$ $(a < 0)$, o ile funkcja podcałkowa jest poprawnie określona.

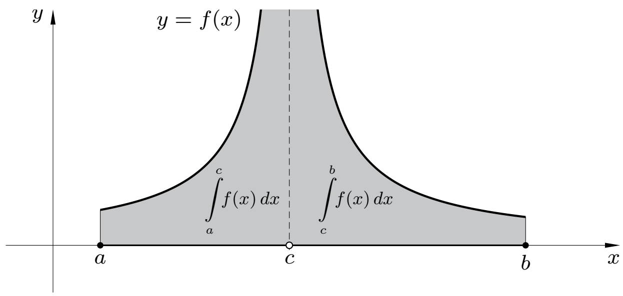
Ćwiczenie 4.4. Korzystając z powyższego faktu zbadać zbieżność całek:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^4}$; (b) $\displaystyle\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt[5]{x+3}}$; (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x-1)^4}}$; (d) $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{(4-x)^3}$.

Definicja 4.5. *(całki z funkcji nieograniczonych, ciąg dalszy)*
Niech funkcja f określona na zbiorze $[a,c) \cup (c,b]$ będzie nieograniczona tylko na obu jednostronnych sąsiedztwach punktu c. Całkę funkcji f na $[a,c) \cup (c,b]$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Jeżeli obie całki po prawej stronie znaku równości są zbieżne, to mówimy, że całka jest zbieżna. Jeżeli jedna z tych całek jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞, a druga jest zbieżna albo rozbieżna odpowiednio do $-\infty$ lub ∞, to mówimy, że całka jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest rozbieżna.

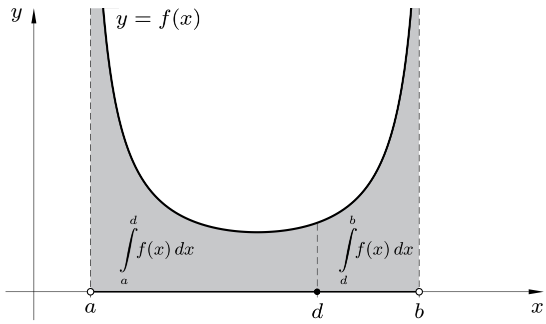


Rys. 4.4. Ilustracja definicji całki z funkcji nieograniczonej na $[a,c) \cup (c,b]$

Uwaga. Podobnie określa się całki funkcji nieograniczonych tylko na sąsiedztwach obustronnych lub jednostronnych punktów $c_1, c_2, \ldots, c_n \in [a, b]$. Na przykład dla funkcji f określonej na przedziale (a, b) i nieograniczonej tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a i na lewostronnym sąsiedztwie punktu b przyjmujemy:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx,$$

gdzie d jest dowolnym punktem przedziału (a, b). Jeżeli całka jest zbieżna dla pewnego d, to jest zbieżna dla dowolnego $d \in (a, b)$ i jej wartość nie zależy od d. Całki zdefiniowane w tym paragrafie nazywamy *całkami niewłaściwymi drugiego rodzaju.*



Rys. 4.5. Ilustracja całki funkcji nieograniczonej na (a, b)

Ćwiczenie 4.6. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych (dla całek zbieżnych obliczyć ich wartości):

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2}$; (b) $\displaystyle\int_{-8}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; (c) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{x(x-1)}$; (d) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\sin^2 x}$;

(e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\arccos x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; (f) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{4-x^2}}$; (g) $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \frac{dx}{\cos x}$; (h*) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Definicja 4.7. *(wartość główna całki niewłaściwej drugiego rodzaju)*
Wartość główną całki niewłaściwej drugiego rodzaju z funkcji f określonej na $[a, b] \setminus \{c\}$ i nieograniczonej jedynie na obu jednostronnych sąsiedztwach punktu c definiujemy wzorem:

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right].$$

Jeżeli granica po prawej stronie równości nie istnieje, to mówimy, że całka niewłaściwa nie ma wartości głównej.

Uwaga. Jeżeli całka niewłaściwa z funkcji f określonej na $[a,b] \setminus \{c\}$ jest zbieżna do w, to wartość główna całki także się równa w.

Ćwiczenie 4.8. Wyznaczyć wartości główne całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

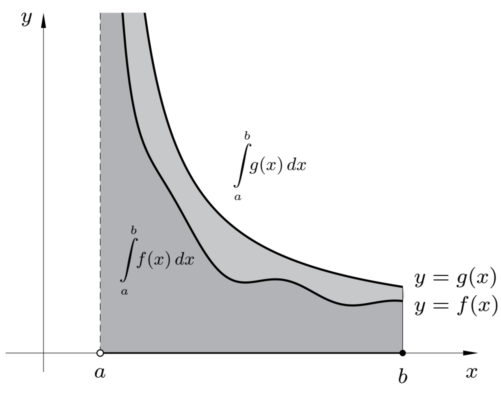
(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$; (c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x^4}\, dx$; (d) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-1}$.

5. Kryteria zbieżności całek niewłaściwych drugiego rodzaju

TWIERDZENIE 5.1. *(kryterium porównawcze zbieżności/rozbieżności całek)* Niech funkcje f i g będą określone na przedziale $(a,b]$ i nieograniczone tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a oraz niech dla każdego $x \in (a,b]$ spełniają nierówności $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Wówczas:

(**a**) jeżeli całka $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ jest zbieżna, to także całka $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ jest zbieżna;

(**b**) jeżeli całka $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ jest rozbieżna do ∞, to także całka $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ jest rozbieżna do ∞.



Rys. 5.1. Ilustracja kryterium porównawczego zbieżności całek niewłaściwych drugiego rodzaju

Uwaga. Twierdzenie powyższe pozostanie prawdziwe, gdy nierówności w założeniu są spełnione dla każdego $x \in (a,b^*]$ $(a < b^* < b)$. Prawdziwe jest także analogiczne twierdzenie dla funkcji określonych na przedziale $[a,b)$ i nieograniczonych tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu b. Wszystkie warianty tego twierdzenia można stosować także dla funkcji niedodatnich.

Ćwiczenie 5.2. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{\sqrt{x}}$; (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+1)\,dx}{\sin^2 x}$; (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{2x-\pi}}$; (d*) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sin x\,dx}{x^3}$.

TWIERDZENIE 5.3. *(kryterium ilorazowe zbieżności/rozbieżności całek)*
Niech funkcje f i g będą dodatnie (ujemne) na przedziale $(a,b]$ i nieograniczone tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a. Ponadto niech spełniają warunek

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \text{ gdzie } 0 < k < \infty.$$

Wówczas całki

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^b g(x)\,dx$$

są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne do $\infty\,(-\infty)$.

Uwaga. Prawdziwe są także analogiczne twierdzenia dla całek niewłaściwych na przedziale $[a,b)$. Przy wyborze funkcji g warto pamiętać, że dla x bliskich 0 prawdziwe są zależności:

$$\sin x \sim x^*; \qquad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}; \qquad a^x \sim 1 + x\ln a\ (a>0); \qquad \ln(1+x) \sim x.$$

Ćwiczenie 5.4. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x^3}}$; (b) $\displaystyle\int_0^8 \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x}}$; (c) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{(e^x-1)\,dx}{x^2}$; (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$;

(e) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\sqrt{x-2}\,dx}{x^3-8}$; (f) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\ln(1+x)}$; (g) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$; (h*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^{10}}}$.

Ćwiczenie* 5.5. Przyjmując odpowiednie definicje zbadać zbieżność całek niewłaściwych, które są jednocześnie całkami pierwszego i drugiego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{1+x}$; (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{1+x^2}$; (c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{xe^x}$; (d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\ln x}$;

(e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$; (f*) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}$; (g*) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-\sqrt{x}}$; (h*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

---

*Symbol $f(x) \sim g(x)$ dla x bliskich 0 oznacza, że $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Ćwiczenie 5.6. *(przykłady z geometrii i fizyki)*

(a) Obliczyć objętość i pole powierzchni bocznej bryły powstałej z obrotu wokół osi Ox obszaru ograniczonego prostymi $x = 1$, $x \geqslant 1$, $y = 0$ i wykresem funkcji $y = 1/x$.

(b) Obliczyć pracę W, jaką należy wykonać, aby ciało o masie $m = 100$ kg przenieść z powierzchni Ziemi do nieskończoności. Zaniedbać opór powietrza. Przyjąć promień Ziemi $R = 6380$ km oraz przyspieszenie na poziomie morza $g_0 = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$.

(c) Obliczyć współrzędne (x_C, y_C) środka masy jednorodnego obszaru ograniczonego prostymi $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ i wykresem funkcji $y = 1/\sqrt[3]{x}$.

(d) Obliczyć siłę, z jaką jednorodnie naładowana półprosta przyciąga ładunek $Q = 4$ C położony na przedłużeniu półprostej, w odległości $d = 1$ m od jej końca. Gęstość liniowa ładunku jest równa $\lambda_0 = 1\,\mathrm{C/m}$ pręta.

(e*) Obliczyć siłę, z jaką jednorodny nieskończony prostoliniowy pręt o gęstości λ_0 przyciąga masę m umieszczoną w odległości r od niego.

2. Szeregi liczbowe i funkcyjne

1. Definicje i podstawowe twierdzenia

Definicja 1.1. *(szereg liczbowy, suma częściowa szeregu)*

Szeregiem liczbowym nazywamy wyrażenie postaci

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \ ,$$

zapisywane także w formie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n \in \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Liczbę a_n nazywamy *n-tym wyrazem*, a sumę

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

n-tą sumą częściową szeregu.

Ćwiczenie 1.2. Wyznaczyć n-te sumy częściowe szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^n + 3^n}{10^n}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n+1]{2} - \sqrt[n+2]{2}\right)$;

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n}{n+1}$; (e*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^1 + 2^2 + \dots + 2^n}{3^n}$; (f*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$.

Definicja 1.3. *(szereg zbieżny i rozbieżny, suma i reszta szeregu)*

Mówimy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *zbieżny*, jeżeli istnieje granica właściwa ciągu (S_n) sum częściowych. Jeżeli zaś $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ albo $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, to mówimy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *rozbieżny odpowiednio do $-\infty$ albo do ∞*. W pozostałych przypadkach mówimy, że szereg jest *rozbieżny*. *Sumą szeregu* zbieżnego nazywamy granicę $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ i oznaczamy ją tym samym symbolem co szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

n-tą resztą szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy liczbę $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Analogicznie definiuje się szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, gdzie $n_0 \in \mathbb{Z}$, jego sumę częściową $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k$ dla $n \geqslant n_0$ oraz sumę $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Uwaga. Jeżeli szereg ma wyrazy nieujemne, to jest zbieżny albo rozbieżny do ∞.

Ćwiczenie 1.4. Korzystając z definicji zbadać zbieżność podanych szeregów. Dla szeregów zbieżnych wyznaczyć ich sumy:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$; (e*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+2n-1}{(2n+1)!}$; (f*) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{4}\right]$.

TWIERDZENIE 1.5. *(o zbieżności kombinacji liniowych szeregów)*
Niech szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będą zbieżne oraz niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

FAKT 1.6. *(o grupowaniu wyrazów szeregu zbieżnego)*
Szereg zbieżny z pogrupowanymi w dowolny sposób wyrazami ma tę samą sumę co szereg wyjściowy.

Uwaga. Nie wolno grupować wyrazów szeregu rozbieżnego, gdyż można otrzymać szeregi zbieżne o różnych sumach. Np.:

$$(1-1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \ldots = 0,$$

ale

$$1 - \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \ldots\right) - \ldots = 1.$$

Nie jest dopuszczalna zmiana kolejności sumowania nieskończenie wielu wyrazów szeregu nawet dla szeregów zbieżnych. Np. szereg

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots$$

ma sumę $\ln 2$, a po przestawieniu kolejności nieskończenie wielu składników otrzymamy szereg

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\dots\ ,$$

który ma sumę $\frac{3}{2}\ln 2$. Zobacz także Uwagę po Definicji 3.4.

FAKT 1.7. *(o zbieżności szeregu geometrycznego)*
Szereg geometryczny

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$

jest zbieżny dla $|x| < 1$ i rozbieżny do ∞ dla $x \geqslant 1$, a dla $x \leqslant -1$ szereg jest rozbieżny. Dla zbieżnego szeregu geometrycznego mamy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Uwaga. Przyjmujemy tutaj umowę, że dla $x = 0$ i $n = 0$ mamy $x^n = 1$.

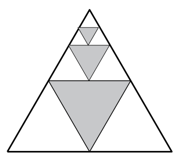
Ćwiczenie 1.8. Korzystając z powyższego faktu zbadać zbieżność szeregów (dla szeregów zbieżnych podać ich sumy):

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (0.999999)^n$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^{n+1}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n+2}}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$; (e*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{17}-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^n$; (f*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^\pi}{\pi^e}\right)^n$.

Ćwiczenie 1.9. Korzystając z rysunku uzasadnić równość

$$\left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots = \frac{1}{3}.$$



Ćwiczenie 1.10. Wyznaczyć wszystkie wartości $x \in \mathbb{R}$, dla których podane szeregi są zbieżne. Obliczyć ich sumy:

(a) $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$; (b) $e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots$;

(c) $\cos x - 2\cos^2 x + 4\cos^3 x - 8\cos^4 x + \dots$

TWIERDZENIE 1.11. *(warunek konieczny zbieżności szeregu)*

Jeżeli szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Uwaga. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Świadczy o tym przykład ciągu $a_n = 1/n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Mamy bowiem $\lim\limits_{n\to\infty}(1/n) = 0$, ale szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1/n)$, zwany *szeregiem harmonicznym*, jest rozbieżny do ∞. Powyższe twierdzenie zapisane w równoważnej postaci:

$$\text{jeżeli } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \text{ albo } \lim_{n\to\infty} a_n \text{ nie istnieje, to szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest rozbieżny,}$$

stosujemy do uzasadniania rozbieżności niektórych szeregów.

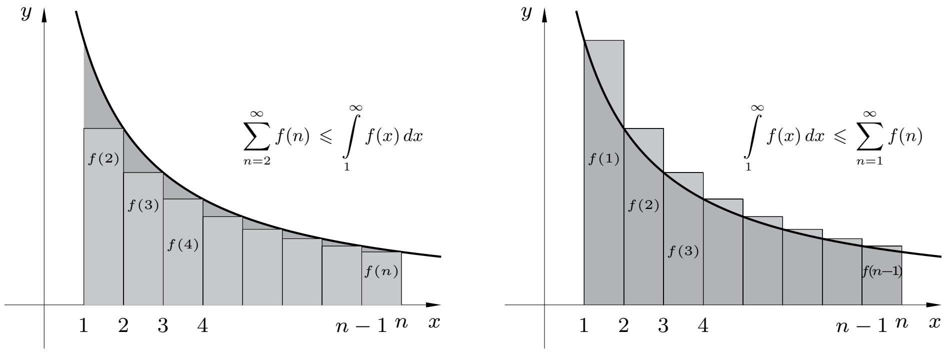
Ćwiczenie 1.12. Korzystając z powyższej uwagi uzasadnić, że podane szeregi są rozbieżne:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{100n+1}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^2}{100n^2+1}$; (c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n}{\ln n}$; (d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n}{1000}}$;

(e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$; (f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{7^n}{5^n+6^n}$; (g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\dfrac{1}{n}$; (h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos\dfrac{\pi}{n}$.

2. Kryteria zbieżności szeregów

TWIERDZENIE 2.1. *(kryterium całkowe zbieżności/rozbieżności szeregów)*
Niech funkcja f będzie nieujemna oraz nierosnąca na przedziale $[n_0, \infty)$, gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$. Wówczas szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ i całka niewłaściwa $\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne do ∞.



Rys. 2.1. Ilustracja kryterium całkowego zbieżności szeregów

Uwaga. *Reszta szeregu*, tj. wyrażenie $R_n = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} f(i)$, spełnia oszacowanie:

$$\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int\limits_{n}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Prawdziwe jest także analogiczne kryterium dla funkcji niedodatniej i niemalejącej.

Ćwiczenie 2.2. Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+9}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} n}{n^2+1}$;

(e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$; (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{16^n-1}$; (g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n}$; (h*) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$.

Ćwiczenie* 2.3. Podać przykład szeregu i całki niewłaściwej świadczące, że założenie monotoniczności funkcji w powyższym twierdzeniu jest istotne.

FAKT 2.4. *(o zbieżności szeregów postaci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$)*
Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots$$

jest zbieżny dla $p > 1$ i rozbieżny do ∞ dla $0 < p \leqslant 1$.

Ćwiczenie 2.5. Korzystając z powyższego faktu wskazać szeregi zbieżne:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{2}{3}}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$;

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)^3}}$; (f) $\sum\limits_{n=11}^{\infty} (n-10)^{-\frac{1}{2}}$.

TWIERDZENIE 2.6. *(kryterium porównawcze zbieżności/rozbieżności szeregów)*
Niech $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ dla każdego $n \geqslant n_0$. Wówczas

(**a**) jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ również jest zbieżny;

(**b**) jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny do ∞, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ również jest rozbieżny do ∞.

Uwaga. Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla szeregów o wyrazach niedodatnich.

Ćwiczenie 2.7. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n}$; (d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-n}$;

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} n}{n^2}$; (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^3}$; (g*) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$; (h*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$.

TWIERDZENIE 2.8. *(kryterium ilorazowe zbieżności/rozbieżności szeregów)*
Niech $a_n, b_n > 0$ $(a_n, b_n < 0)$ dla każdego $n \geqslant n_0$ oraz niech

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k, \quad \text{gdzie } 0 < k < \infty.$$

Wówczas szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne do ∞ $(-\infty)$.

Uwaga. Przy wyborze wyrazów b_n warto pamiętać, że dla dużych n prawdziwe są zależności:

$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}^{*}; \qquad \arcsin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}; \qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}; \qquad \cos\frac{1}{n} \sim 1 - \frac{1}{2n^2};$$

$$a^{\frac{1}{n}} \sim 1 + \frac{1}{n}\ln a \ (a > 0); \qquad \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}; \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \sim 1 + \frac{p}{n} \ (p \in \mathbb{R}).$$

W powyższym twierdzeniu założenie, że wyrazy a_n, b_n szeregów są dodatnie (ujemne) jest istotne. Świadczy o tym przykład szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Mamy bowiem $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n/b_n) = 1$, podczas gdy pierwszy szereg jest zbieżny, a drugi rozbieżny.

Ćwiczenie 2.9. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 - n^2 + 2}{n^5 - n^3 + 3}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n - 3^n}$;

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$; (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{n}$; (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$;

(g*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - n\sin\frac{1}{n}\right)$; (h*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arcctg} n}{n}$; (i*) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt[n]{3} - 1\right)$.

TWIERDZENIE 2.10. *(kryterium d'Alemberta[†] zbieżności/rozbieżności szeregów)*
Niech $a_n > 0$ dla każdego $n > n_0$ oraz niech

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

---

[*] Symbol $a_n \sim b_n$ oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

[†] Jean le Roud d'Alembert (1717-1783), matematyk francuski.

Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest:

(**a**) zbieżny, jeżeli $q < 1$, (**b**) rozbieżny do ∞, jeżeli $1 < q \leqslant \infty$.

Uwaga. Dla $q = 1$ kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga, czy szereg jest zbieżny. Np. dla ciągów $a_n = 1/n^2$, $b_n = 1/n$ mamy $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+1}/b_n) = 1$, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ jest rozbieżny do ∞. Jeżeli dla każdego $n \geqslant n_0$ wyrazy szeregu spełniają nierówność $a_{n+1}/a_n \geqslant 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny do ∞.

Ćwiczenie 2.11. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(2n)!}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$;

(e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\pi^n}$; (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}$; (g*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$; (h*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\,(3n)!}{(5n)!}$.

TWIERDZENIE 2.12. *(kryterium Cauchy'ego*[‡] *zbieżności/rozbieżności szeregów)* Niech $a_n \geqslant 0$ dla każdego $n > n_0$ oraz niech

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest:

(**a**) zbieżny, jeżeli $q < 1$, (**b**) rozbieżny do ∞, jeżeli $1 < q \leqslant \infty$.

Uwaga. Dla $q = 1$ także kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga zbieżności szeregu. Aby to uzasadnić wystarczy rozważyć szeregi z poprzedniej uwagi.

Ćwiczenie 2.13. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{5}\right)^n$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{\pi^n}$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$; (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arccos\frac{1}{n}\right)^n$;

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^n+1}$; (h) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln^n\left(2+\frac{1}{n}\right)$; (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{n}\right)\right]^{2n+1}$.

[‡] Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matematyk francuski.

Ćwiczenie 2.14. Korzystając z warunku koniecznego zbieżności szeregów uzasadnić równości:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{100}}{3^n} = 0$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n}{n!} = 0$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)!}{n^n} = \infty$; (d*) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n)!\,(5n)!}{(7n)!} = \infty$.

3. Zbieżność bezwzględna szeregów

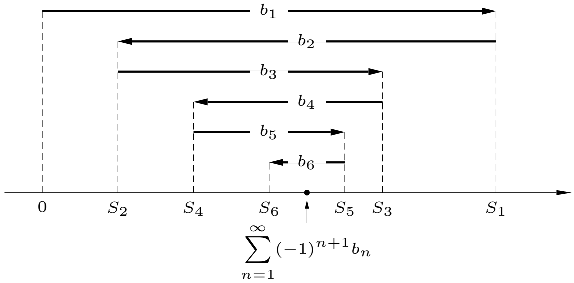
TWIERDZENIE 3.1. *(Leibniza[§] o zbieżności szeregu naprzemiennego)*
Jeżeli ciąg (b_n) jest nierosnący od numeru $n_0 \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, to *szereg naprzemienny*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots$$

jest zbieżny. Ponadto dla każdego $n \geqslant n_0$ prawdziwe jest oszacowanie reszty szeregu:

$$|R_n| = |S - S_n| = |S - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\, b_i| \leqslant b_{n+1},$$

gdzie S oznacza sumę szeregu $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} b_i$.



Rys. 3.1. Ilustracja twierdzenia Leibniza

Uwaga. Monotoniczność ciągu (b_n) jest istotnym założeniem twierdzenia, gdyż np. ciąg $b_n = \left(2 + (-1)^n\right)/n$ spełnia warunek $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, ale szereg naprzemienny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ jest rozbieżny.

Ćwiczenie 3.2. Korzystając z kryterium Leibniza uzasadnić zbieżność szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n+2}{n^2+3}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$;

[§]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), matematyk niemiecki.

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\ln n}{n}$; (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{n+2}{3n-1}\right)^n$; (f*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n-\ln n}$.

Ćwiczenie 3.3. Obliczyć sumy przybliżone szeregów ze wskazaną dokładnością:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$, $\delta = 0.1$; (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n!}$, $\delta = 0.001$.

Definicja 3.4. *(zbieżność bezwzględna szeregu)*

Mówmy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *zbieżny bezwzględnie*, gdy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Uwaga. Kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego zapewniające zbieżność szeregu gwarantują jednocześnie zbieżność bezwzględną. Szereg zbieżny bezwzględnie jest zbieżny do tej samej sumy przy dowolnym przestawieniu wyrazów.

Ćwiczenie 3.5. Zbadać zbieżność bezwzględną szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2)^n}{n^2}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1-2n}{3n+2}\right)^n$;

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}$; (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{4^n}$; (f*) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n\ln\ln n}$.

TWIERDZENIE 3.6. *(o zbieżności szeregów zbieżnych bezwzględnie)*

Jeżeli szereg jest zbieżny bezwzględnie, to jest zbieżny.

Uwaga. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Świadczy o tym przykład szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$, zwanego *szeregiem anharmonicznym*, który jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie.

Ćwiczenie 3.7. Korzystając z twierdzenia uzasadnić, że podane szeregi są zbieżne:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{n^3+n}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}{n^2+1}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{3^n}$; (d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos n\pi}{n\ln^2 n}$.

Definicja 3.8. *(szereg zbieżny warunkowo)*

Szereg zbieżny, który nie jest zbieżny bezwzględnie, nazywamy *zbieżnym warunkowo*.

Ćwiczenie 3.9. Zbadać zbieżność warunkową szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\pi}{n}$; (c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\ln n}$;

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^2}{n^3+1}$; (e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{\ln n}\right)^n$; (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$.

TWIERDZENIE 3.10*. *(Riemanna[¶] o sumie szeregu warunkowo zbieżnego)*
W szeregu warunkowo zbieżnym można w ten sposób przestawić wyrazy, aby jego suma była z góry zadaną liczbą rzeczywistą oraz tak, aby szereg był rozbieżny do $-\infty$ lub ∞.

4. Iloczyn szeregów*

Definicja 4.1. *(iloczyn szeregów)*
Iloczynem szeregów $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ nazywamy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, którego n-ty wyraz ma postać

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad \text{gdzie } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Uwaga. Uzasadnieniem takiego określenia iloczynu szeregów liczbowych jest następujące rozumowanie. Rozważmy szeregi potęgowe[‖] $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Iloczyn tych szeregów (wyznaczony formalnie, tak jak iloczyn wielomianów) ma postać

$$\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\right) \cdot \left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\right) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots,$$

gdzie

$$c_0 = a_0 b_0, \ \ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \ \ c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \ \ \ldots$$

Przyjmując w otrzymanej tożsamości $x = 1$ dostaniemy określenie iloczynu szeregów liczbowych. Wprowadza się także inne definicje iloczynu szeregów.

Ćwiczenie 4.2. Obliczyć iloczyny par szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$; (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$;

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$; (d*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(-2)^n}$.

TWIERDZENIE 4.3. *(Cauchy'ego)*
Jeżeli szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne bezwzględnie, to ich iloczyn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ także jest zbieżny bezwzględnie oraz zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

[¶] Bernhard Riemann (1826-1866), matematyk niemiecki.
[‖] Zobacz §3.3.

Ćwiczenie* 4.4. Pokazać, że iloczyn $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ jest szeregiem rozbieżnym, mimo że każdy z czynników jest szeregiem zbieżnym.

Ćwiczenie* 4.5. Pokazać, że iloczyn $\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n\right) \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(2^n - 2^{-n-1}\right)\right)$ jest szeregiem zbieżnym, mimo że każdy z czynników jest szeregiem rozbieżnym.

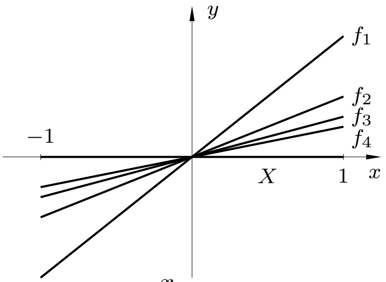
5. Ciągi funkcyjne

Definicja 5.1. *(ciąg funkcyjny)*

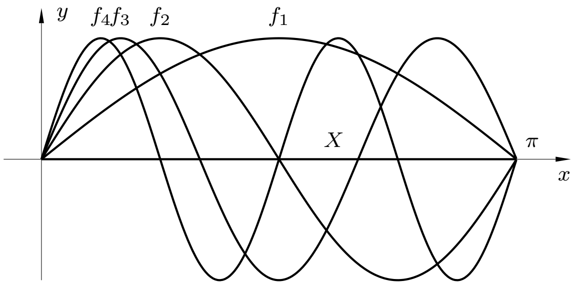
Ciągiem funkcyjnym na zbiorze $X \subset \mathbb{R}$ nazywamy ciąg (f_n), którego wyrazami są funkcje

$$f_n : X \longrightarrow \mathbb{R} \ (n \in \mathbb{N}).$$

Przykład 5.2. Na rysunkach przedstawiono wykresy kilku początkowych wyrazów pewnych ciągów funkcyjnych:



$f_n(x) = \frac{x}{n}$, $X = [-1, 1]$



$f_n(x) = \sin nx$, $X = [0, \pi]$

Ćwiczenie 5.3. Narysować wykresy kilku początkowych wyrazów ciągów funkcyjnych:

(a) $f_n(x) = x^n$, $X = [0, 1]$;

(b) $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin x$, $X = [0, 2\pi]$;

(c) $f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n}$, $X = \mathbb{R}$;

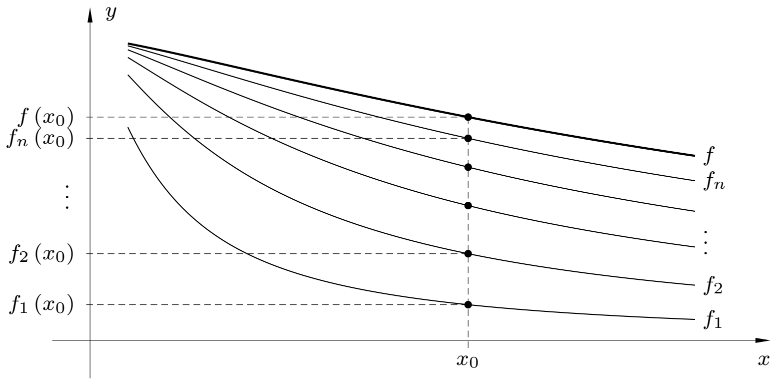
(d) $f_n(x) = \sqrt{x - \frac{4}{n}}$, $X = [4, \infty)$.

Definicja 5.4. *(zbieżność punktowa ciągu funkcyjnego)*

Mówimy, że ciąg funkcyjny (f_n) określony na zbiorze X jest *zbieżny w punkcie* $x_0 \in X$, jeżeli ciąg liczbowy $(f_n(x_0))$ jest zbieżny. Zbiór wszystkich punktów, w których ciąg funkcyjny jest zbieżny, nazywamy *obszarem zbieżności* tego ciągu. Mówimy, że ciąg funkcyjny (f_n) jest *zbieżny punktowo do funkcji* f *na zbiorze* $Y \subset X$, jeżeli dla każdego $x \in Y$ zachodzi równość

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

Funkcję f nazywamy wtedy *granicą punktową* lub krótko granicą ciągu funkcyjnego (f_n) na zbiorze Y.



Rys. 5.1. Ilustracja zbieżności w punkcie ciągu funkcyjnego

Ćwiczenie 5.5. Znaleźć granice oraz obszary zbieżności ciągów funkcyjnych:

(a) $f_n(x) = x^n$, $X = [0, 1]$;

(b) $f_n(x) = \dfrac{n}{n+x}$, $X = [0, \infty)$;

(c) $f_n(x) = \ln\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$, $X = (0, \infty)$;

(d) $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n}$, $X = [0, 2]$;

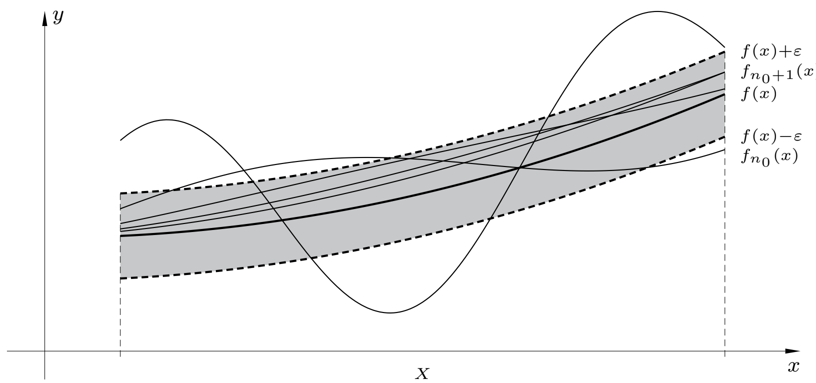
(e) $f_n(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla } |x| \leqslant n, \\ 0 & \text{dla } |x| > n, \end{cases}$ $X = \mathbb{R}$;

(f) $f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 1 & \text{dla } \dfrac{1}{n} < x, \end{cases}$ $X = [0, \infty)$;

(g) $f_n(x) = (-1)^n x$, $X = \mathbb{R}$;

(h*) $f_n(x) = \sin(\pi n! x)$, $X = \mathbb{R}$.

Definicja 5.6. *(zbieżność jednostajna ciągu funkcyjnego)*
Mówimy, że ciąg funkcyjny (f_n) określony na zbiorze X jest *zbieżny jednostajnie* do funkcji f na zbiorze $Y \subset X$, co zapisujemy $f_n \underset{Y}{\rightrightarrows} f$, jeżeli dla dowolnej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę naturalną n_0, iż nierówność $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ będzie prawdziwa dla każdego $n > n_0$ i wszystkich $x \in X$.



Rys. 5.2. Ilustracja zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego

Uwaga. Geometrycznie zbieżność jednostajna ciągu funkcyjnego oznacza, że w dowolnym pasku epsilonowym otaczającym wykres granicy znajdują się prawie wszystkie wykresy wyrazów ciągu (rysunek). Łatwo zauważyć, że funkcja, która jest granicą jednostajną ciągu funkcyjnego, jest jednocześnie granicą punktową tego ciągu. Stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Świadczy o tym ciąg z **Ćwiczenia 5.7** (c).

Ćwiczenie 5.7. Korzystając z definicji zbadać jednostajną zbieżność podanych ciągów funkcyjnych do wskazanych funkcji na określonych zbiorach:

(a) $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{n}$, $f(x) \equiv 0$, $Y = [0, 2\pi]$;

(b) $f_n(x) = x^n$, $f(x) \equiv 0$, $Y = [-1/2, 1/2]$;

(c) $f_n(x) = x^n$, $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 \text{ dla } x = 1, \end{cases}$ $Y = [0, 1]$;

(d) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{nx+1}$, $f(x) = x$, $Y = [0, 1/2]$.

Ćwiczenie 5.8. Wyznaczyć granice punktowe podanych ciągów funkcyjnych. Następnie, korzystając z definicji, zbadać jednostajną zbieżność tych ciągów na wskazanych zbiorach:

(a) $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+1}$, $Y = \mathbb{R}$;

(b) $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) x^2$, $Y = [1, 10]$;

(c) $f_n(x) = \cos \dfrac{x}{n}$, $Y = [0, 2\pi]$;

(d) $f_n(x) = x^n(1-x)$, $Y = [0, 1/2]$.

FAKT 5.9. *(warunek jednostajnej zbieżności ciągu funkcyjnego)*

Ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji f na zbiorze Y wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg liczbowy (a_n), określony wzorem

$$a_n = \sup \{|f_n(x) - f(x)| : x \in Y\},$$

jest zbieżny do 0.

Ćwiczenie 5.10. Wyznaczyć granice punktowe podanych ciągów funkcyjnych. Następnie korzystając z powyższego faktu zbadać jednostajną zbieżność tych ciągów na wskazanych zbiorach:

(a) $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{nx^2+1}$, $Y = \mathbb{R}$;

(b) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $Y = [0, \infty)$;

(c) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$, $Y = \mathbb{R}$;

(d) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $Y = [0, 1]$;

(e) $f_n(x) = \sin\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$, $Y = [0, 2\pi]$;

(f) $f_n(x) = x^n(1-x)^n$, $Y = [0, 1]$.

Ćwiczenie 5.11. Załóżmy, że ciągi funkcyjne (f_n) i (g_n) są zbieżne jednostajnie na zbiorze Y odpowiednio do funkcji f i g.

(a) Pokazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych α i β ciąg funkcyjny $(\alpha f_n + \beta g_n)$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $\alpha f + \beta g$ na Y.

(b) Czy ciąg funkcyjny $(f_n g_n)$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji fg na Y?

TWIERDZENIE 5.12. *(Diniego** o zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego)*
Niech funkcje f_n $(n \in \mathbb{N})$ będą ciągłe na przedziale $[a, b]$. Ponadto niech granica punktowa f ciągu funkcyjnego (f_n) będzie funkcją ciągłą oraz dla każdego $x \in [a, b]$. Niech ciąg liczbowy $(f_n(x))$ będzie nierosnący (niemalejący). Wtedy ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny jednostajnie do f na przedziale $[a, b]$.

Ćwiczenie 5.13. Korzystając z twierdzenia Diniego pokazać, że podane ciągi funkcyjne są zbieżne jednostajnie do wskazanych granic:
(a) $f_n(x) = e^{-nx}$, $f(x) \equiv 0$, $[a, b] = [1, 100]$;

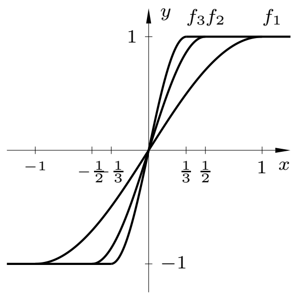
(b) $f_n(x) = \operatorname{arcctg} \dfrac{x}{n}$, $f(x) \equiv \dfrac{\pi}{2}$, $[a, b] = [-1, 1]$.

TWIERDZENIE 5.14. *(o ciągłości granicy ciągu funkcyjnego)*
Niech f będzie granicą ciągu funkcyjnego (f_n) na przedziale I. Jeżeli na tym przedziale: funkcje f_n są ciągłe oraz ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie, to funkcja f jest ciągła na I.

Uwaga. W powyższym twierdzeniu nie można zrezygnować z założenia zbieżności jednostajnej. Wynika to z poniższego przykładu.

Przykład 5.15.
Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$ określonych wzorem:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla} \quad x < -\dfrac{1}{n}, \\ \sin \dfrac{n\pi x}{2} & \text{dla} \quad -\dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 1 & \text{dla} \quad \dfrac{1}{n} < x. \end{cases}$$



Granicą tego ciągu jest funkcja $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \operatorname{sgn}(x)$. Funkcja ta nie jest jednak ciągła w 0.

Ćwiczenie 5.16. Pokazać, że podane ciągi funkcyjne nie są zbieżne jednostajnie do wskazanych funkcji na zadanych przedziałach:

**Ulisse Dini (1845-1918), matematyk włoski.

(a) $f_n(x) = x^{2n}$, $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } |x| < 1, \\ 1 \text{ dla } |x| = 1, \end{cases}$ $I = [-1, 1]$;

(b*) $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} nx$, $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $I = [-1, 1]$.

Ćwiczenie 5.17. Wyznaczyć granicę punktową ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1}.$$

Czy ten ciąg jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$?

TWIERDZENIE 5.18. *(o różniczkowalności granicy ciągu funkcyjnego)*
Niech f będzie granicą ciągu funkcyjnego (f_n) na przedziale I. Jeżeli na tym przedziale funkcje f_n' są ciągłe oraz ciąg (f_n') jest zbieżny jednostajnie, to funkcja f jest różniczkowalna oraz dla każdego $x \in I$ zachodzi równość

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Uwaga. Innymi słowy, pochodna granicy ciągu funkcyjnego jest równa granicy pochodnych jego wyrazów.

Ćwiczenie 5.19. Pokazać, że ciąg funkcyjny $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f \equiv 0$ na $\mathbb{R}$, jednakże ciąg (f_n') nie jest zbieżny do $f' \equiv 0$ nawet punktowo.

TWIERDZENIE 5.20. *(o całkowalności granicy ciągu funkcyjnego)*
Niech f będzie granicą ciągu funkcyjnego (f_n) na przedziale $[a, b]$. Jeżeli na tym przedziale funkcje f_n są całkowalne oraz ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie, to funkcja f jest całkowalna oraz zachodzi równość

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Uwaga. Innymi słowy, całka granicy ciągu funkcyjnego jest równa granicy całek jego wyrazów. W powyższym twierdzeniu nie można zastąpić zbieżności jednostajnej zbieżnością punktową. Ilustrują to ciągi funkcyjne w poniższym ćwiczeniu.

Ćwiczenie 5.21. Pokazać, że ciągi funkcyjne o podanych wyrazach są zbieżne punktowo na przedziale $[0, 1]$ do funkcji $f \equiv 0$:

(a) $f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x \text{ dla } 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2n}, \\ 2n - 2n^2x \text{ dla } \dfrac{1}{2n} \leqslant x < \dfrac{1}{n}, \\ 0 \text{ dla } \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$ (b) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$.

Uzasadnić, że dla żadnego z tych ciągów nie zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

6. Szeregi funkcyjne

Definicja 6.1. *(szereg funkcyjny, suma częściowa szeregu)*
Szeregiem funkcyjnym na zbiorze $X \subset \mathbb{R}$ nazywamy wyrażenie postaci

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots\ ,$$

zapisywane także w formie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, gdzie (f_n) jest ciągiem funkcyjnym na X. Funkcję f_n nazywamy *n-tym wyrazem*, a funkcję

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

n-tą sumą częściową szeregu.

Uwaga. Zamiast $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ będziemy pisali krótko $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$. Wskaźnik sumowania szeregu funkcyjnego może rozpoczynać się od dowolnej liczby naturalnej albo od zera.

Przykład 6.2. Przykłady szeregów funkcyjnych:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+|x|^n}$; (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (3x-2)^n$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+nx)$;

(d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt[n]{|\sin x|}$; (e) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \sqrt{n-5\cos x}$; (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-x}$.

Definicja 6.3. *(zbieżność punktowa i jednostajna szeregu funkcyjnego)*

Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest *zbieżny w punkcie*, jeżeli w tym punkcie jest zbieżny ciąg jego sum częściowych (S_n). Zbiór punktów, w których szereg funkcyjny jest zbieżny, nazywamy *obszarem zbieżności. Sumą szeregu* funkcyjnego na obszarze zbieżności nazywamy granicę $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ i oznaczamy ją tym samym symbolem co szereg. Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

Mówimy, że szereg funkcyjny jest *zbieżny punktowo* na zbiorze, jeżeli na tym zbiorze ciąg jego sum częściowych jest zbieżny punktowo. Podobnie mówimy, że zbieżność szeregu jest *jednostajna* na zbiorze, jeżeli na tym zbiorze ciąg jego sum częściowych jest zbieżny jednostajnie.

Uwaga. Inaczej mówiąc, szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny w punkcie x_0, jeżeli zbieżny jest szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$. Zatem obszar zbieżności szeregu funkcyjnego, to zbiór tych punktów x_0, w których szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ jest zbieżny. Do badania zbieżności punktowej szeregów funkcyjnych można stosować kryteria Cauchy'ego, d'Alemberta, czy też kryteria porównawcze lub ilorazowe sformułowane wcześniej dla szeregów liczbowych.

Ćwiczenie 6.4. Wyznaczyć obszary zbieżności szeregów funkcyjnych:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+1)^n$; (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\dfrac{x}{3^n}$;

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^n - x^{n+1}\right)$; (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$; (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{1+n^2x^2}$.

Znaleźć sumy szeregów (a), (b), (d).

Ćwiczenie 6.5. Pokazać, że jeżeli szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest jednostajnie zbieżny na zbiorze, to ciąg funkcyjny (f_n) jest w tym zbiorze jednostajnie zbieżny do funkcji tożsamościowo równej zero.

Definicja 6.6. *(zbieżność bezwzględna szeregu funkcyjnego)*

Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest *zbieżny bezwzględnie* w punkcie x_0, gdy zbieżny jest szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x_0)|$. Zbiór punktów, w których szereg funkcyjny jest zbieżny bezwzględnie, nazywamy *obszarem zbieżności* bezwzględnej.

Uwaga. Podobnie jak dla szeregów liczbowych, ze zbieżności bezwzględnej szeregu funkcyjnego w pewnym obszarze wynika jego zbieżność punktowa w tym obszarze.

Ćwiczenie 6.7. Znaleźć obszary zbieżności bezwzględnej szeregów funkcyjnych:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^n}$; (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(x^2-4\right)^n$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n+3^n}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$.

TWIERDZENIE 6.8. *(Weierstrassa o zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego)* Niech wyrazy szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ spełniają dla dowolnego $n \geqslant n_0$ oraz każdego $x \in X$ warunek $|f_n(x)| \leqslant a_n$ oraz niech szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie zbieżny. Wtedy szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie na zbiorze X.

Uwaga. Stosując powyższe twierdzenie zwykle przyjmuje się, że

$$a_n = \sup\{|f_n(x)| : x \in X\}.$$

Ćwiczenie 6.9. Korzystając z twierdzenia Weierstrassa uzasadnić zbieżność bezwzględną i jednostajną podanych szeregów funkcyjnych na wskazanych zbiorach:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, $\mathbb{R}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^2}{(x^2+1)\,3^n}$, $\mathbb{R}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $\mathbb{R}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{nx}}$, $[0,\infty)$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{arc\,tg} nx$, $(-1,1)$; (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{nx}}$, $[1,\infty)$.

Ćwiczenie 6.10. Zbadać zbieżność jednostajną szeregu funkcyjnego $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ na przedziale $[0,\infty)$.

Ćwiczenie 6.11. Korzystając z twierdzenia Diniego uzasadnić, że jeżeli wyrazy szeregu funkcyjnego są nieujemne i ciągłe na przedziale domkniętym, a suma szeregu jest funkcją ciągłą, to szereg jest zbieżny jednostajnie na tym przedziale.

TWIERDZENIE 6.12*. *(Abela[††] o zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego)* Niech funkcje f_n oraz g_n ($n \in \mathbb{N}$), będą określone na przedziale I. Przy czym szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ będzie zbieżny jednostajnie na I, a dla każdego $x \in I$ ciąg $(g_n(x))$ będzie nierosnący (niemalejący). Ponadto niech istnieje stała M taka, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in I$ zachodzi nierówność $|g_n(x)| \leqslant M$. Wówczas szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale I.

Ćwiczenie* 6.13. Korzystając z twierdzenia Abela uzasadnić zbieżność jednostajną podanych szeregów funkcyjnych na wskazanych przedziałach:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^n$, $\left[0,\frac{3}{4}\right]$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{x^n+1}$, $[2,\infty)$.

[††]Niels Henrik Abel (1802-1829), matematyk norweski.

TWIERDZENIE 6.14*. *(Dirichleta[‡‡] o zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego)* Niech funkcje f_n oraz g_n $(n \in \mathbb{N})$, będą określone na przedziale I. Przy czym ciąg (g_n) będzie zbieżny jednostajnie na I do funkcji $g \equiv 0$ oraz dla każdego $x \in I$ ciąg liczbowy $(g_n(x))$ będzie nierosnący (niemalejący). Ponadto niech istnieje stała $M > 0$ taka, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in I$ zachodzi nierówność

$$|f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)| \leqslant M,$$

Wówczas szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale I.

Ćwiczenie* 6.15. Korzystając z twierdzenia Dirichleta uzasadnić zbieżność jednostajną podanych szeregów funkcyjnych na wskazanych zbiorach:

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n + \sin x}$, $[0, 2\pi]$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos \dfrac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2 + x^2}}$, $\mathbb{R}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$, $\left[\dfrac{\pi}{6}, \pi\right]$.

TWIERDZENIE 6.16. *(o ciągłości sumy szeregu funkcyjnego)*

Jeżeli na przedziale I funkcje f_n $(n \in \mathbb{N})$ są ciągłe oraz szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie, to jego suma jest funkcją ciągłą na tym przedziale.

Uwaga. Innymi słowy, można przestawiać operację przechodzenia do granicy z operacją sumowania

$$\lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right), \quad \text{gdzie } x_0 \in I.$$

Ćwiczenie 6.17. Uzasadnić, że sumy podanych szeregów funkcyjnych są funkcjami ciągłymi na wskazanych przedziałach:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x + n^2}$, $[0, \infty)$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{n}$, $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$; (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{5^n}$, $\mathbb{R}$;

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{3^n + 1}$, $[-2, 2]$; (e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, $[0, 10]$; (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{tg} \dfrac{x}{3^n}$, $[-2, 2]$.

Ćwiczenie 6.18. Pokazać, że szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x} \right]$ nie jest jednostajnie zbieżny na przedziale $[0, 1]$, niemniej jednak jego suma jest funkcją ciągłą.

[‡‡] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), matematyk niemiecki.

Ćwiczenie 6.19. Niech $f_1(x)=x,\ f_n(x)=\sqrt[2n-1]{x}-\sqrt[2n-3]{x}$, dla $n\geqslant 2$ oraz $x\in[-1,1]$. Uzasadnić, że szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ nie jest jednostajnie zbieżny na przedziale $[-1,1]$.

TWIERDZENIE 6.20. *(o różniczkowalności sumy szeregu funkcyjnego)*

Jeżeli na przedziale I funkcje f_n' $(n\in\mathbb{N})$ są ciągłe, szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ jest zbieżny jednostajnie, a szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny punktowo, to suma szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest funkcją różniczkowalną na tym przedziale oraz dla każdego $x\in I$ zachodzi równość

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'\left(x\right).$$

Uwaga. Innymi słowy, pochodna sumy szeregu funkcyjnego jest równa sumie pochodnych jego wyrazów.

Ćwiczenie 6.21. Uzasadnić, że sumy podanych szeregów funkcyjnych są funkcjami różniczkowalnymi na wskazanych przedziałach:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{x+n}$, $[0,\infty)$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{1+x^n}$, $[3,4)$.

Ćwiczenie 6.22. Pokazać, że suma $f(x)$ szeregu funkcyjnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(x+1)^n}$ jest funkcją różniczkowalną na przedziale $(0,\infty)$. Obliczyć $f'(1)$.

TWIERDZENIE 6.23. *(o całkowalności sumy szeregu funkcyjnego)*

Jeżeli na przedziale $[a,b]$ funkcje f_n $(n\in\mathbb{N})$ są całkowalne oraz szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie, to jego suma jest funkcją całkowalną na tym przedziale oraz zachodzi równość

$$\int\limits_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx.$$

Uwaga. Innymi słowy, całka sumy szeregu funkcyjnego jest równa sumie całek jego wyrazów.

Ćwiczenie 6.24. Pokazać, że suma szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ jest funkcją ciągłą na przedziale $(0,\infty)$. Obliczyć

$$\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}\left(\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}\right)dx.$$

7. Szeregi potęgowe

Definicja 7.1. *(szereg potęgowy)*
Szeregiem potęgowym o środku $x_0 \in \mathbb{R}$ i współczynnikach $c_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, nazywamy szereg funkcyjny postaci:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)^2 + \ldots , \quad \text{gdzie } x \in \mathbb{R}.$$

Uwaga. W tym paragrafie przyjmujemy umowę, że $(x - x_0)^0 = 1$ dla $x = x_0$.

Definicja 7.2. *(promień zbieżności szeregu potęgowego)*

Promień zbieżności R szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ określamy wzorem:

$$R = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty, \\ \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}, & \text{gdy} \quad 0 < \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} < \infty, \\ \infty, & \text{gdy} \quad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = 0. \end{cases}$$

Uwaga. Promień zbieżności szeregu może być obliczany także ze wzorów:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}, \qquad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|,$$

o ile te granice istnieją.

Ćwiczenie 7.3. Wyznaczyć środki, współczynniki oraz obliczyć promienie zbieżności szeregów potęgowych:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{5}{3}\right)^n (x + 5)^n$; (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x - 3)^n}{2^n}$; (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(6 - 3x)^n}{3^n + 2^n}$;

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n (n + 1)}$; (e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-x)^n}{n!}$; (f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n (4 - x)^n$;

(g*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{1}{n} (x + 1)^n$; (h*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 5^n x^{3n}$; (i*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.

TWIERDZENIE 7.4. *(Cauchy'ego–Hadamarda*)*
Niech R $(0 < R < \infty)$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$.

Wtedy szereg ten jest:

---

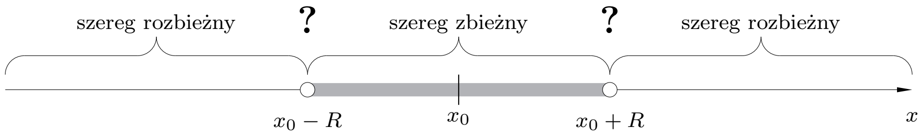
*Jacques Hadamard (1865-1963), matematyk francuski.

(**a**) zbieżny bezwzględnie w każdym punkcie przedziału $(x_0 - R, x_0 + R)$;

(**b**) zbieżny jednostajnie na każdym przedziale $[x_0 - r, x_0 + r]$, gdzie $0 < r < R$;

(**c**) rozbieżny w każdym punkcie zbioru $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$.

Uwaga. Na końcach przedziału $(x_0 - R, x_0 + R)$ szereg potęgowy może być zbieżny lub rozbieżny. Jeżeli $R = 0$, to szereg potęgowy jest zbieżny jedynie w punkcie x_0. Jeżeli $R = \infty$, to szereg potęgowy jest zbieżny bezwzględnie na całej prostej.

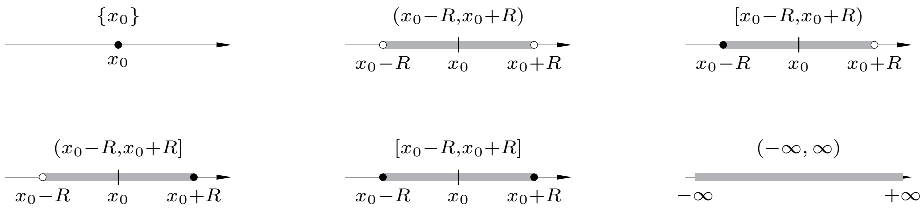


Rys. 7.1. Ilustracja twierdzenia Cauchy'ego–Hadamarda

Definicja 7.5. *(przedział zbieżności szeregu potęgowego)*

Zbiór tych $x \in \mathbb{R}$, dla których szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ jest zbieżny, nazywamy *przedziałem zbieżności* szeregu.

Uwaga. Przedział zbieżności szeregu potęgowego może mieć tylko jedną z postaci:



Ćwiczenie 7.6. Znaleźć przedziały zbieżności szeregów potęgowych:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-2)^n$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{4^{2n}}$;

(d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n \ln^2 n}$; (e*) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{2n+1}}{n^2+1}$; (f*) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Ćwiczenie 7.7. Podać przykład szeregu potęgowego, którego przedziałem zbieżności jest:

(a) $[0, 4)$; (b) $(-2, 0)$; (c) $[-3, 3]$; (d) $\mathbb{R}$; (e*) $\{e\}$.

Definicja 7.8. *(szereg Taylora[†] i Maclaurina[‡])*
Niech funkcja f ma w punkcie x_0 pochodne dowolnego rzędu. Szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

nazywamy *szeregiem Taylora* funkcji f o środku w punkcie x_0. Jeżeli $x_0 = 0$, to szereg ten nazywamy *szeregiem Maclaurina*.

Uwaga*. Ze zbieżności szeregu Maclaurina funkcji nie wynika, że jego suma jest równa tej funkcji. Np. dla funkcji

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

mamy $f^{(n)}(0) = 0$, gdzie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ale $f(x) \neq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0$.

Ćwiczenie 7.9. Wyznaczyć szeregi Taylora dla podanych funkcji o środku w punkcie $x_0 = 1$:

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$; (b) $f(x) = (x+1)e^x$; (c) $f(x) = \frac{x}{2^x}$; (d*) $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

TWIERDZENIE 7.10. *(o rozwijaniu funkcji w szereg Taylora)*
Jeżeli funkcja f ma na otoczeniu O punktu x_0 pochodne dowolnego rzędu oraz dla każdego $x \in O$ spełniony jest warunek $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, gdzie

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

oznacza n-tą resztę we wzorze Taylora dla funkcji f, to

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \ \text{ dla każdego } \ x \in O.$$

Uwaga. W założeniach punkt c zależy od n i od x. Zamiast tego założenia można przyjąć, że wszystkie pochodne funkcji f są wspólnie ograniczone, tzn. istnieje liczba dodatnia M taka, że

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant M \ \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ oraz dla każdego } x \in O.$$

Ćwiczenie 7.11. Pokazać, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy:

(a) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$; (b) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$.

[†]Brook Taylor (1685-1731), matematyk angielski.
[‡]Colin Maclaurin (1698-1746), matematyk szkocki.

Szeregi Maclaurina niektórych funkcji elementarnych

- $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ dla $|x| < 1$;
- $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$ dla $x \in \mathbb{R}$;
- $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots$ dla $x \in \mathbb{R}$;
- $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots$ dla $x \in \mathbb{R}$;
- $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots$ dla $-1 < x \leqslant 1$;
- $\operatorname{sh} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \ldots$ dla $x \in \mathbb{R}$;
- $\operatorname{ch} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \ldots$ dla $x \in \mathbb{R}$.
- $(1+x)^p = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dbinom{p}{n} x^n$ dla $|x| < 1$, gdzie $\dbinom{p}{n} = \dfrac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}$, $p \in \mathbb{R}$.

TWIERDZENIE 7.12. *(o jednoznaczności rozwinięcia funkcji w szereg potęgowy)*
Jeżeli $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ dla każdego x z pewnego otoczenia punktu x_0, to

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Uwaga. Inaczej mówiąc, jeżeli na otoczeniu punktu funkcja jest sumą pewnego szeregu potęgowego, to jest to jej szereg Taylora.

Ćwiczenie 7.13. Dla podanych funkcji obliczyć wskazane pochodne:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1-3x}$, $\quad f^{(100)}(0)$;

(b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $\quad f^{(49)}(0)$;

(c) $f(x) = \dfrac{1}{8+x^3}$, $\quad f^{(18)}(0)$;

(d) $f(x) = e^{-3x^2}$, $\quad f^{(31)}(0)$;

(e*) $f(x) = e^{-x}\sin x$, $\quad f^{(100)}(0)$;

(f*) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x-3}$, $\quad f^{(20)}(-1)$;

(g*) $f(x) = e^x \sin x \cos 3x, \quad f^{(10)}(0)$; (h*) $f(x) = \cos^3 x, \quad f^{(30)}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Ćwiczenie 7.14. Wykorzystując rozwinięcia Maclaurina funkcji e^x, $\sin x$, $\cos x$ oraz $1/(1-x)$ wyznaczyć szeregi Maclaurina podanych funkcji. Określić promienie zbieżności otrzymanych szeregów:

(a) e^{-2x}; (b) $\dfrac{1}{2+3x}$; (c) $\dfrac{1}{(x+2)(x-1)}$; (d) $\sin^2 x$;

(e) $\cos x^2$; (f*) $\operatorname{sh}^2 x$; (g*) $\dfrac{1}{1+x+x^2}$; (h) $x \sin 3x$.

Ćwiczenie 7.15. Wykorzystując rozwinięcia Maclaurina pewnych funkcji obliczyć sumy szeregów liczbowych:

(a) $1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots$; (b) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi^3}{2^3 \cdot 3!} + \dfrac{\pi^5}{2^5 \cdot 5!} - \dfrac{\pi^7}{2^7 \cdot 7!} + \ldots$;

(c) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots$; (d) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots$

TWIERDZENIE 7.16. *(o różniczkowaniu szeregu potęgowego)*

Niech R $(0 < R \leqslant \infty)$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Wtedy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad \text{dla każdego } x \in (-R, R).$$

Uwaga. Na przedziale $(-R, R)$ suma szeregu potęgowego ma ciągłe pochodne dowolnego rzędu. Podobny wzór jest prawdziwy dla szeregów potęgowych $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$.

Ćwiczenie 7.17. Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu szeregu potęgowego pokazać, że

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)(n+2)}{2} x^n \quad \text{dla każdego } x \in (-1, 1).$$

TWIERDZENIE 7.18. *(o całkowaniu szeregu potęgowego)*

Niech R $(0 < R \leqslant \infty)$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Wtedy

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{dla każdego } x \in (-R, R).$$

Uwaga. Podobny wzór jest prawdziwy dla szeregów potęgowych postaci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n$.

Ćwiczenie 7.19. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu szeregów potęgowych pokazać, że:

(a) $\operatorname{arc\,tg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ dla $x \in (-1, 1)$;

(b) $\int\limits_0^x e^{-t^2}\, dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Ćwiczenie 7.20. Wykorzystując twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów pokazać, że dla każdego $x \in (-1, 1)$ prawdziwe są równości:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

Ćwiczenie 7.21. Korzystając z twierdzeń o różniczkowaniu i/lub całkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumy szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{3^n}$; (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n5^n}$;

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$; (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} \cdot \frac{3^n}{4^n}$; (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+3)}{5^n}$;

(g*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$; (h*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^{-n}}{n(n+1)}$; (i*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)(2n-1)}{2^n}$.

Ćwiczenie* 7.22. Korzystając z rozwinięć Maclaurina funkcji elementarnych oraz z twierdzeń o różniczkowaniu i/lub całkowaniu szeregów potęgowych wyznaczyć sumy szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n)!2^n}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$; (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n n!}$; (d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}$.

8. Szeregi Fouriera*

Definicja 8.1. *(szereg trygonometryczny)*

Szeregiem trygonometrycznym na przedziale $[-\pi, \pi]$ nazywamy szereg postaci:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

gdzie $a_0 \in \mathbb{R}$ oraz $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 8.2. *(szereg Fouriera*[§]*)*
Niech funkcja f będzie całkowalna na przedziale $[-\pi, \pi]$. *Szeregiem Fouriera* tej funkcji nazywamy szereg trygonometryczny

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right),$$

gdzie

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \ \text{ dla } n = 0, 1, 2, \ldots\ , \\[2ex] b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \ \text{ dla } n = 1, 2, \ldots\ . \end{cases}$$

Fakt, że szereg trygonometryczny $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$ jest szeregiem Fouriera funkcji f zapisujemy symbolicznie

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

Uwaga. Szereg Fouriera funkcji określonej na przedziale $[-l, l]$ ma postać

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}\right),$$

gdzie

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} \, dx \ \text{ dla } n = 0, 1, 2, \ldots\ , \\[2ex] b_n = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} \, dx \ \text{ dla } n = 1, 2, \ldots\ . \end{cases}$$

Rozważa się także zespoloną postać szeregu Fouriera.

FAKT 8.3. *(współczynniki szeregu Fouriera funkcji parzystych i nieparzystych)*
1. Jeżeli funkcja f jest parzysta, to

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \ \text{ dla } n = 0, 1, 2, \ldots\ , \\[2ex] b_n = 0 \ \text{ dla } n = 1, 2, \ldots\ . \end{cases}$$

[§]Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), matematyk francuski.

2. Jeżeli funkcja f jest nieparzysta, to $a_n = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ oraz

$$\begin{cases} a_n = 0 \ \text{ dla } n = 1, 2, \ldots\ , \\ b_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int\limits_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \ \text{ dla } n = 1, 2, \ldots\ . \end{cases}$$

Ćwiczenie 8.4. Wyznaczyć szeregi Fouriera na przedziale $[-\pi, \pi]$ funkcji:
(a) $\operatorname{sgn} x$; (b) x; (c) $|x|$; (d) $\sin^4 x$; (e) $\operatorname{sh} x$; (f) $\pi^2 - x^2$.

TWIERDZENIE 8.5. *(kryterium Dirichleta¶)*
Jeżeli funkcja f na przedziale $[-\pi, \pi]$ jest przedziałami monotoniczna oraz przedziałami ciągła, przy czym w każdym punkcie nieciągłości x spełnia warunek

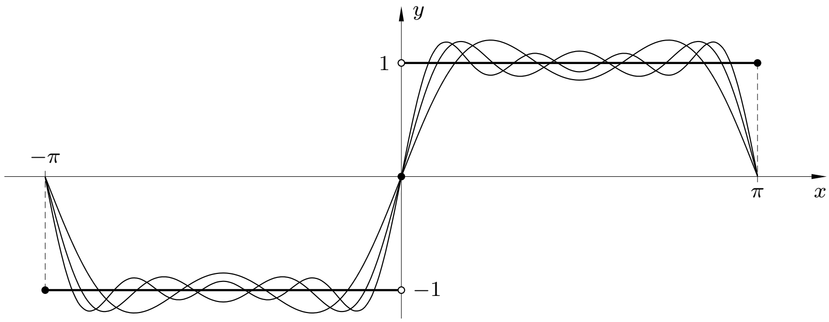
$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x_-) + f(x_+)\right],$$

a na końcach przedziału zachodzą równości

$$f(-\pi) = f(\pi) = \frac{1}{2}\left[f(\pi_-) + f(-\pi_+)\right],$$

to jest sumą swojego szeregu Fouriera, tzn. dla każdego $x \in [-\pi, \pi]$ mamy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$



Rys. 8.1. Przybliżenie funkcji $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ sumą dwóch, trzech i czterech początkowych wyrazów jej szeregu Fouriera

Uwaga. Jeżeli funkcja f jest określona na $\mathbb{R}$ i ma okres 2π, to jest sumą swojego szeregu Fouriera na całej prostej. Podobnie formułuje się kryterium Dirichleta dla funkcji f określonej na przedziale $[-l, l]$.

Ćwiczenie 8.6. Zbadać zbieżność szeregów Fouriera otrzymanych w poprzednim ćwiczeniu.

¶Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), matematyk niemiecki.

Zbieżne szeregi Fouriera niektórych funkcji

- $x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \quad \text{dla } x \in (-\pi, \pi);$

- $\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx \quad \text{dla } x \in (0, 2\pi);$

- $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x \quad \text{dla } x \in (-\pi, \pi);$

- $\pi^2 - x^2 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx \quad \text{dla } x \in (-\pi, \pi);$

- $\operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x \quad \text{dla } x \in (-\pi, \pi).$

Ćwiczenie 8.7. Korzystając z rozwinięć w szereg Fouriera odpowiednich funkcji uzasadnić równości:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4};$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$

3. Rachunek różniczkowy funkcji dwóch i trzech zmiennych

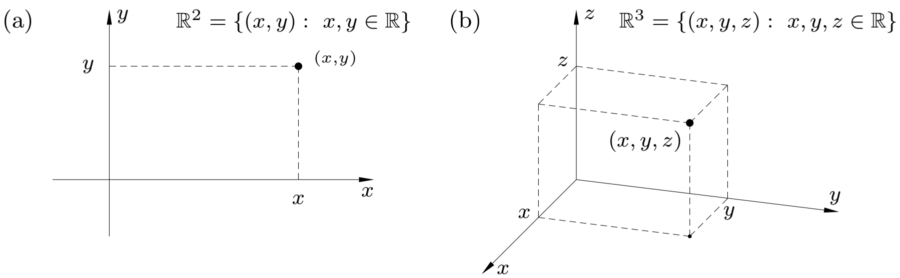
Pojęcia i twierdzenia sformułowane w tym rozdziale dla funkcji dwóch zmiennych można przenieść, bez istotnych zmian, na funkcje większej liczby zmiennych.

1. Zbiory na płaszczyźnie i w przestrzeni

Definicja 1.1. *(płaszczyzna, przestrzeń)*

• *Przestrzenią dwuwymiarową* (płaszczyzną) nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych (x, y), gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Przestrzeń tę oznaczamy przez $\mathbb{R}^2$.

• *Przestrzenią trójwymiarową* (przestrzenią) nazywamy zbiór wszystkich trójek uporządkowanych (x, y, z), gdzie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Przestrzeń tę oznaczamy przez $\mathbb{R}^3$.



Rys. 1.1. Współrzędne punktu: (a) na płaszczyźnie, (b) w przestrzeni

Pary (x, y) lub trójki (x, y, z) nazywamy odpowiednio *punktami płaszczyzny* lub *przestrzeni.* Liczby x, y oraz x, y, z nazywamy *współrzędnymi kartezjańskimi* odpowiednio punktów (x, y) oraz (x, y, z).

Definicja 1.2. *(odległość punktów)*

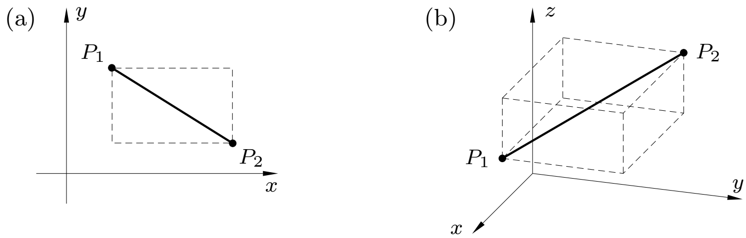
Odległość punktów $P_1,\ P_2$ płaszczyzny lub przestrzeni oznaczamy symbolem $|P_1P_2|$ i określamy wzorem:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

gdy $P_1 = (x_1, y_1)\,,\ P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ lub wzorem:

$$|P_1P_2| \ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

gdy $P_1 = (x_1, y_1, z_1)\,,\ P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$.



Rys. 1.2. Odległość punktów: (a) na płaszczyźnie, (b) w przestrzeni

Ćwiczenie 1.3. Obliczyć odległości podanych punktów płaszczyzny lub przestrzeni:
(a) $P = (0,0),\ Q = (3,-4)$; (b) $A = \left(1, -2\sqrt{3}, \sqrt{5}\right),\ B = \left(-3, \sqrt{3}, -\sqrt{5}\right)$.

Definicja 1.4. *(otoczenie i sąsiedztwo punktu)*

• *Otoczeniem* o promieniu $r > 0$ punktu P_0 na płaszczyźnie lub w przestrzeni nazywamy zbiór:

$$O(P_0, r) = \{P : |P_0P| < r\}.$$

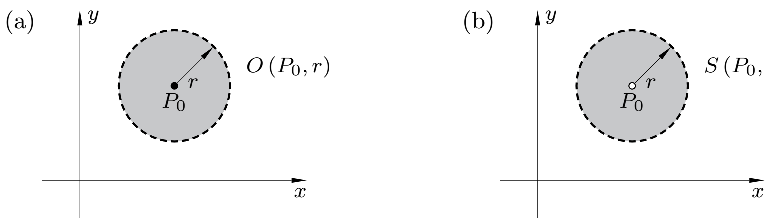
Otoczeniem punktu na płaszczyźnie jest koło otwarte o środku w tym punkcie. Otoczeniem punktu w przestrzeni jest kula otwarta o środku w tym punkcie.

• *Sąsiedztwem* o promieniu $r > 0$ punktu P_0 na płaszczyźnie lub w przestrzeni nazywamy zbiór:

$$S(P_0, r) = O(P_0, r) \setminus \{P_0\}.$$

Sąsiedztwem punktu na płaszczyźnie jest koło otwarte bez środka. Podobnie, sąsiedztwem punktu w przestrzeni jest kula otwarta bez środka.

Uwaga. Jeżeli promień otoczenia lub sąsiedztwa nie będzie istotny w rozważaniach, to zbiór $O(P_0, r)$ lub $S(P_0, r)$ będziemy oznaczali krótko $O(P_0)$ lub $S(P_0)$.



Rys. 1.3. (a) otoczenie punktu, (b) sąsiedztwo punktu na płaszczyźnie

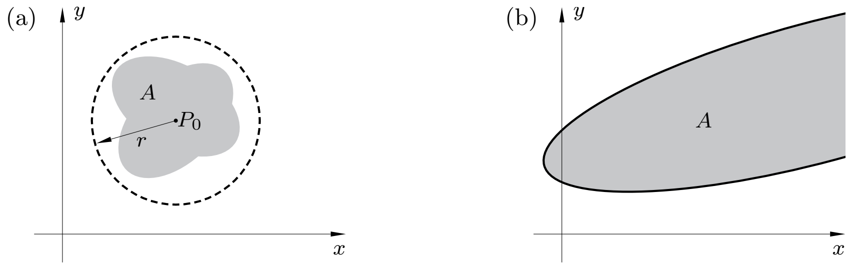
Ćwiczenie 1.5. Naszkicować otoczenia i sąsiedztwa podanych punktów o wskazanych promieniach:
(a) $P_0 = (-1, 2),\ r = \sqrt{5}$; (b) $P_0 = (0, 4, -3),\ r = 1$.

Definicja 1.6. *(zbiór ograniczony i nieograniczony)*

Mówimy, że zbiór A jest *ograniczony*, jeżeli jest zawarty w otoczeniu pewnego punktu, tzn. istnieje punkt P_0 oraz liczba dodatnia r, dla których zachodzi warunek:

$$A \subset O(P_0, r).$$

W przeciwnym przypadku mówimy, że zbiór A jest *nieograniczony*.



Rys. 1.4. (a) zbiór ograniczony, (b) zbiór nieograniczony na płaszczyźnie

Ćwiczenie 1.7. Zbadać, które z podanych podzbiorów płaszczyzny lub przestrzeni są ograniczone:

(a) $A = \left\{(x,y):\ x^2+y^2>2\right\}$; (b) $B = \{(x,y):\ |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 3\}$;

(c) $C = \left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=3\right\}$; (d) $D = \{(x,y,z):\ x-y+z \leqslant 5\}$.

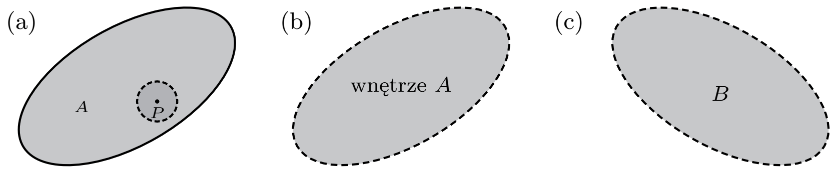
Definicja 1.8. *(punkt wewnętrzny zbioru, wnętrze zbioru, zbiór otwarty)*

• Mówimy, że P jest *punktem wewnętrznym* zbioru A, jeżeli istnieje otoczenie tego punktu zawarte w tym zbiorze, tzn. istnieje liczba dodatnia r, dla której zachodzi warunek:

$$O\,(P,r) \subset A.$$

• *Wnętrzem zbioru* nazywamy zbiór wszystkich jego punktów wewnętrznych.

• Mówimy, że zbiór jest *otwarty*, jeżeli każdy punkt tego zbioru jest jego punktem wewnętrznym.



Rys. 1.5. (a) punkt wewnętrzny zbioru, (b) wnętrze zbioru, (c) zbiór otwarty

Ćwiczenie 1.9. Znaleźć i naszkicować wnętrza zbiorów:

(a) $A = \left\{(x,y):\ 2x+x^2+y^2 \leqslant 0\right\}$; (b) $B = \left\{(x,y):\ y-x^2+1 \geqslant 0\right\}$;

(c) $C = \{(x,y,z):\ |x+y+z| \leqslant 1\}$; (d) $D = \{(x,y,z):\ xyz>0\}$.

Ćwiczenie 1.10. Zbadać, które z podanych podzbiorów płaszczyzny lub przestrzeni są otwarte:

(a) $A = \{(x,y):\ y>|x|\}$; (b) $B = \{(x,y):\ \sin(x+y)<1\}$;

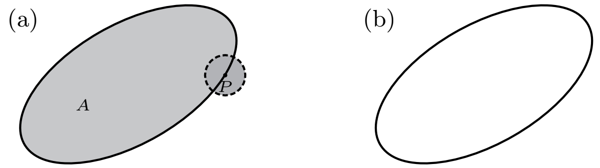
(c) $C = \left\{(x,y,z):\ 0<x^2+y^2+z^2<9\right\}$; (d) $D = \{(x,y,z):\ x>0, y \geqslant 1, z>2\}$.

Definicja 1.11. *(punkt brzegowy zbioru, brzeg zbioru, zbiór domknięty)*

- Mówimy, że P jest *punktem brzegowym* zbioru A, jeżeli w każdym otoczeniu tego punktu istnieją punkty należące i punkty nienależące do tego zbioru, tzn. dla każdej liczby dodatniej r zachodzi warunek:

$$O(P,r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{oraz} \quad O(P,r) \cap A' \neq \emptyset\,.$$

- *Brzegiem zbioru* nazywamy zbiór wszystkich jego punktów brzegowych.
- Mówimy, że zbiór jest *domknięty*, jeżeli zawiera swój brzeg.



Rys. 1.6. (a) punkt brzegowy zbioru, (b) brzeg zbioru

Ćwiczenie 1.12. Znaleźć i naszkicować brzegi zbiorów:

(a) $A = \left\{(x,y):\ 1 \leqslant x^2 + y^2 < 4\right\}$; (b) $B = \left\{(x,y):\ \left|y - x^2\right| > 2\right\}$;

(c) $C = \{(x,y,z):\ xyz = 0\}$; (d) $D = \left\{(x,y,z):\ x^2 + y^2 > 1\right\}$.

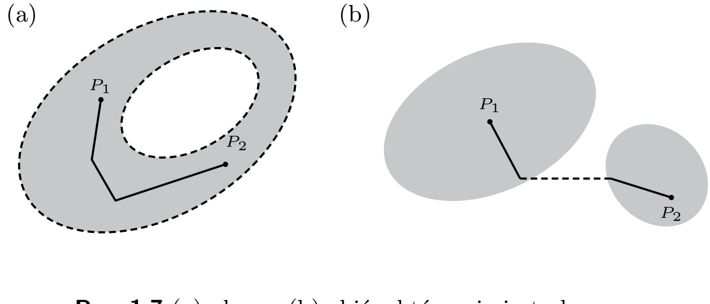
Ćwiczenie 1.13. Zbadać, które z podanych podzbiorów płaszczyzny lub przestrzeni są domknięte:

(a) $A = \{(x,y):\ x + y + 1 = 0\}$; (b) $B = \left\{(x,y):\ \left|x^2 + y^2 - 2\right| \leqslant 1\right\}$;

(c) $C = \{(x,y,z):\ z > x\}$; (d) $D = \left\{(x,y,z):\ x + y^2 + z^2 = 4\right\}$.

Definicja 1.14. *(obszar, obszar domknięty)*

Mówmy, że niepusty podzbiór płaszczyzny lub przestrzeni jest *obszarem*, gdy jest otwarty oraz każde dwa punkty zbioru można połączyć łamaną całkowicie w nim zawartą.



Rys. 1.7 (a) obszar (b) zbiór, który nie jest obszarem

Obszar łącznie ze swoim brzegiem nazywamy *obszarem domkniętym*.

Ćwiczenie 1.15. Zbadać, które z podanych podzbiorów płaszczyzny albo przestrzeni są obszarami lub obszarami domkniętymi:

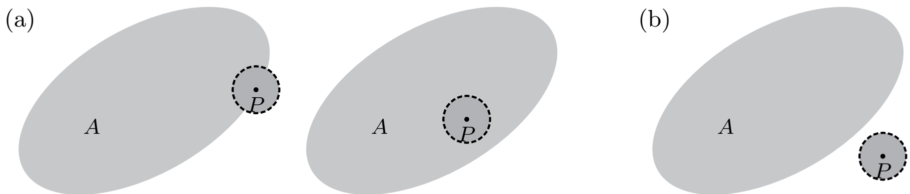
(a) $A = \left\{(x, y) : \ x^2 + y^2 > 1\right\}$; (b) $B = \{(x, y) : \ |x| \leqslant y\}$;

(c) $C = \left\{(x, y, z) : \ 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\right\}$; (d) $D = \{(x, y, z) : \ x \neq 0\}$.

Definicja 1.16. *(punkt skupienia zbioru)*

Mówimy, że P jest *punktem skupienia* zbioru A, jeżeli w każdym sąsiedztwie tego punktu można znaleźć punkty zbioru A różne od punktu P.

Uwaga. Punkty wewnętrzne obszaru są jego punktami skupienia.



Rys. 1.8. (a) punkt skupienia zbioru (b) punkt, który nie jest punktem skupienia zbioru

Ćwiczenie* 1.17. Wyznaczyć punkty skupienia zbiorów:

(a) $A = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}\right\}$; (b) $B = \left\{\left(\frac{1}{n+m}, (-1)^{n+m}\right) \in \mathbb{R}^2 : m, n \in \mathbb{N}\right\}$;

(c) $C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ xyz \neq 0\right\}$; (d) $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x, y, z \in \mathbb{Q}\right\}$.

2. Funkcje dwóch i trzech zmiennych

Definicja 2.1. *(funkcja dwóch i trzech zmiennych)*

• *Funkcją* dwóch zmiennych określoną na zbiorze $A \subset \mathbb{R}^2$ o wartościach w $\mathbb{R}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi ze zbioru A dokładnie jednej liczby rzeczywistej. Funkcję taką oznaczamy przez np. $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ lub $z = f(x, y)$, gdzie $(x, y) \in A$. Wartość funkcji f w punkcie (x, y) oznaczamy przez $f(x, y)$.

• *Funkcją* trzech zmiennych określoną na zbiorze $A \subset \mathbb{R}^3$ o wartościach w $\mathbb{R}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi ze zbioru A dokładnie jednej liczby rzeczywistej. Funkcję taką oznaczamy przez np. $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ lub $w = f(x, y, z)$, gdzie $(x, y, z) \in A$. *Wartość funkcji* f w punkcie (x, y, z) oznaczamy przez $f(x, y, z)$.

Przykład 2.2. Przykłady funkcji dwóch i trzech zmiennych:

(a) $f(x, y) = \ln x + y^2 + 1$; (b) $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

(c) $h(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dla} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{dla} \quad (x, y) = (0, 0); \end{cases}$ (d) $k(x, y) = e^y$;

(f) pole elipsy o półosiach a, b wyraża się wzorem $P(a,b) = \pi ab$;

(g) $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$; (h) $g(x,y,z) = \arcsin \dfrac{xy}{z}$;

(i) $h(x,y,z) = \begin{cases} x-y & \text{dla} \quad x > y, \\ e^{x+y+z} & \text{dla} \quad x \leqslant y; \end{cases}$ (j) $k(x,y,z) = x + z$;

(k) objętość prostopadłościanu o krawędziach a, b, c wyraża się wzorem
$$V(a,b,c) = abc.$$

Definicja 2.3. *(dziedzina, dziedzina naturalna)*

Niech f będzie funkcją określoną na podzbiorze płaszczyzny (przestrzeni). Zbiór ten nazywamy *dziedziną* funkcji f i oznaczamy przez D_f. Jeżeli dany jest tylko wzór określający funkcję, to zbiór punktów płaszczyzny (przestrzeni), dla których wzór ten ma sens, nazywamy *dziedziną naturalną* funkcji.

Ćwiczenie 2.4. Znaleźć i narysować dziedziny naturalne funkcji:

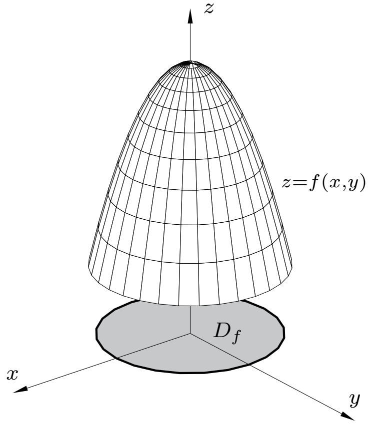
(a) $f(x,y) = \ln\left(1 - x^2 - y^2\right)$; (b) $g(x,y) = \arcsin\left(x^2 + y^2 - 2\right)$;

(c) $p(x,y) = \dfrac{1}{(x-2)(y+1)}$; (d) $h(x,y,z) = \sqrt[4]{xyz}$;

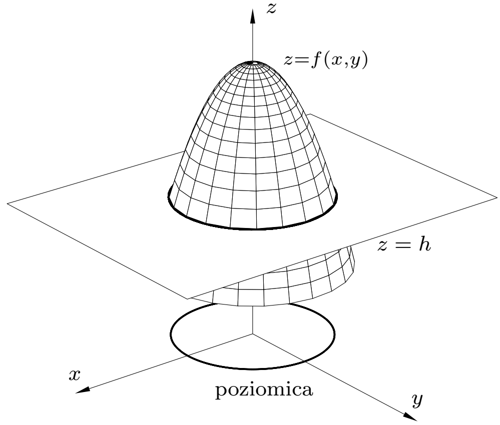
(e) $k(x,y,z) = \dfrac{10}{e^{x+y-z} - 1}$; (f*) $q(x,y,z) = \sqrt{\sin\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 1}$.

Definicja 2.5. *(wykres i poziomica funkcji)*

- *Wykresem* funkcji f dwóch zmiennych o dziedzinie D_f nazywamy zbiór:
$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in D_f, \ z = f(x,y)\right\}.$$
- *Poziomicą* wykresu funkcji f odpowiadającą poziomowi $h \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór:
$$\{(x,y) \in D_f : \ f(x,y) = h\}.$$



Rys. 2.3. Wykres funkcji dwóch zmiennych



Rys. 2.4. Poziomica wykresu funkcji

Uwaga. Oczywiście można analogicznie jak powyżej sformułować definicję wykresu funkcji trzech zmiennych, ale będzie to podzbiór przestrzeni czterowymiarowej i raczej trudno sobie wyobrazić jego ilustracje graficzną.

Ćwiczenie 2.6. Znaleźć poziomice funkcji dwóch zmiennych i na tej podstawie naszkicować ich wykresy:

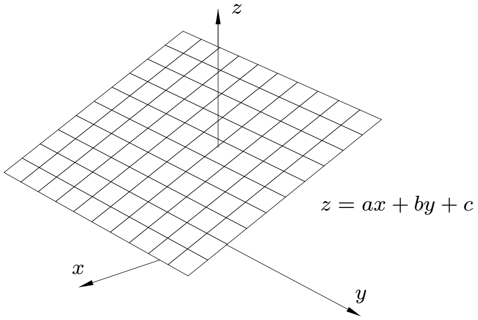
(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$; (b) $g(x,y) = 2 - x^2 - y^2$; (c) $h(x,y) = \sqrt{16-(x^2+y^2)}$;

(d) $p(x,y) = |x| + |y|$; (e) $r(x,y) = y - x^2$; (f) $k(x,y) = -\sqrt{9-y^2}$.

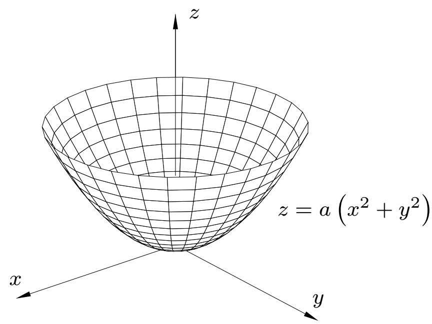
Wykresy ważniejszych funkcji dwóch zmiennych

• Wykresem funkcji $z = Ax + By + C$ jest *płaszczyzna.*

• Wykresem funkcji $z = a\left(x^2+y^2\right)$ $(a \neq 0)$, jest *paraboloida obrotowa*, tj. powierzchnia powstała z obrotu paraboli $z = ax^2$, $y = 0$, wokół osi Oz.



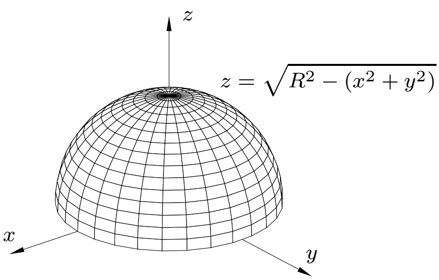
Rys. 2.5. Płaszczyzna



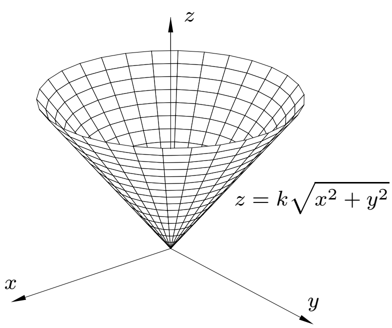
Rys. 2.6. Paraboloida obrotowa

• Wykresem funkcji $z = \pm\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$ $(R > 0)$ jest górna $(+)$ lub dolna $(-)$ *półsfera* o środku w początku układu współrzędnych i promieniu R.

• Wykresem funkcji $z = k\sqrt{x^2+y^2}$ $(k \neq 0)$ jest *stożek*, tj. powierzchnia powstała z obrotu półprostej $z = kx$, $y = 0$ $(x \geqslant 0)$ wokół osi Oz.



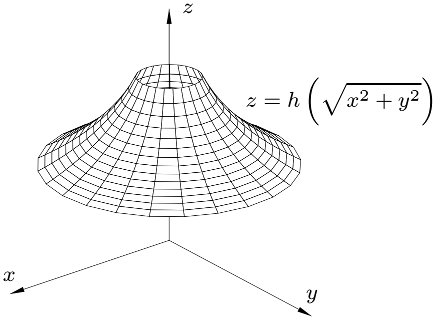
Rys. 2.7. Górna półsfera



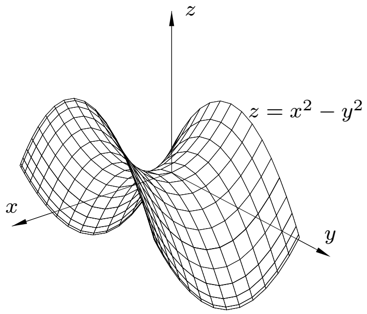
Rys. 2.8. Stożek

• Wykresem funkcji $z = h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ jest *powierzchnia obrotowa* powstała z obrotu wykresu funkcji $z = h(x)$, $y = 0$ $(x \geqslant 0)$ wokół osi Oz.

• Wykres funkcji $z = x^2 - y^2$ przedstawia „siodło”.

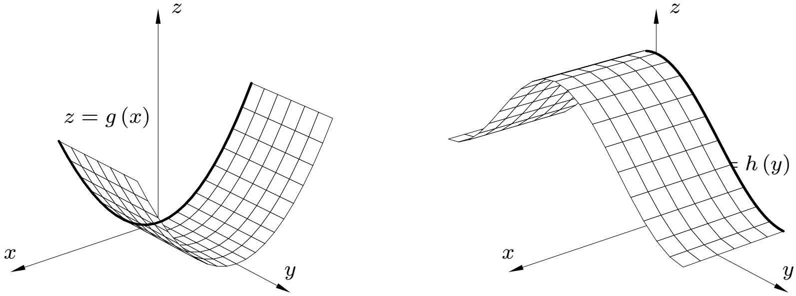


Rys. 2.9. Powierzchnia obrotowa



Rys. 2.10. „Siodło”

• Wykresem funkcji $z = g(x)$ lub $z = h(y)$ jest *powierzchnia walcowa* powstała z przesunięcia wykresu funkcji $z = g(x)$ dla $y = 0$ równolegle do osi Oy lub odpowiednio wykresu funkcji $z = h(y)$ dla $x = 0$ równolegle do osi Ox.



Rys. 2.11. Powierzchnie walcowe

Ćwiczenie 2.7. Opisać, za pomocą jakich przekształceń geometrycznych, z wykresu funkcji $z = f(x,y)$ można otrzymać wykresy funkcji:

(a) $z = f(x,y) - 5$; (b) $z = f(x+3, y-2)$; (c) $z = -f(x,y)$;

(d) $z = f(2x, 3y)$; (e) $z = f(-x, y)$; (f) $z = |f(x,y)|$;

(g) $z = 4f(x,y)$; (h) $z = f(x, |y|)$; (i) $z = f(|x|, |y|)$.

Ćwiczenie 2.8. Naszkicować wykresy funkcji dwóch zmiennych:

(a) $z = 3 - 2x$; (b) $z = 3\left(x^2 + y^2\right)$; (c) $z = 4 - x^2 - y^2$;

(d) $z = \sqrt{y - x^2}$; (e) $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$; (f) $z = 6 - \sqrt{2x - x^2 + 4y - y^2}$;

(g) $z = -\sqrt{4 - y^2}$; (h) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$; (i) $z = 2 - \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$.

Definicja 2.9. *(funkcja ograniczona)*
Mówimy, że funkcja f dwóch zmiennych jest *ograniczona* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli istnieje liczba dodatnia M taka, że

$$|f(x,y)| \leqslant M \text{ dla każdego } (x,y) \in A.$$

Uwaga. Definicje funkcji dwóch zmiennych ograniczonych z dołu lub z góry są podobne do odpowiednich definicji dla funkcji jednej zmiennej.

Ćwiczenie 2.10. Zbadać, które z funkcji są ograniczone, ograniczone z dołu, ograniczone z góry w swoich dziedzinach naturalnych:

(a) $f(x,y) = \sin x + \cos y$;

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;

(c) $f(x,y,z) = x^2 + y^4$;

(d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$;

(e) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2+4}$;

(f*) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

3. Granice i ciągłość funkcji

Definicja 3.1. *(ciąg na płaszczyźnie)*
Ciągiem punktów na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ nazywamy przyporządkowanie każdej liczbie naturalnej punktu płaszczyzny. Wartość tego przyporządkowania dla liczby naturalnej n nazywamy n-tym wyrazem ciągu i oznaczamy przez $P_n = (x_n, y_n)$. Ciąg taki oznaczamy symbolem (P_n) lub $\big((x_n,y_n)\big)$. Zbiór wyrazów tego ciągu, tj. zbiór $\{(x_n,y_n) : n \in \mathbb{N}\}$, oznaczamy krótko przez $\{P_n\}$ lub $\{(x_n,y_n)\}$.

Ćwiczenie 3.2. Naszkicować na płaszczyźnie kilka początkowych wyrazów ciągów:

(a) $(x_n,y_n) = \left(n, \dfrac{1}{n}\right)$;

(b) $(x_n,y_n) = \left(\dfrac{n}{n+1}, \dfrac{1}{n^2}\right)$;

(c) $(x_n,y_n) = \big((-1)^n, (-1)^{n+1}\big)$;

(d) $(x_n,y_n) = \left(\cos\dfrac{n\pi}{6}, \sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$;

(e) $(x_n,y_n) = \left(\sin\dfrac{1}{n}, \cos\dfrac{2}{n}\right)$;

(f) $(x_n,y_n) = (2^n, 3^n)$.

Definicja 3.3. *(ciąg zbieżny)*
Mówimy, że ciąg $(P_n) = \big((x_n,y_n)\big)$ jest *zbieżny* do punktu $P_0 = (x_0,y_0)$, co notujemy $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n,y_n) = (x_0,y_0)$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Ćwiczenie 3.4. Zbadać, czy podane ciągi na płaszczyźnie lub w przestrzeni są zbieżne (dla ciągów zbieżnych wskazać ich granice):

(a) $(x_n,y_n) = \big(\log_{n+1} 2, 1/n\big)$;

(b) $(x_n,y_n) = (2^n, (-1)^n)$;

(c) $(x_n,y_n,z_n) = \left(\sqrt[n]{n}, \dfrac{n+1}{n}, 3\right)$;

(d) $(x_n,y_n,z_n) = \left(\dfrac{1}{2^n}, \left(\dfrac{2}{3}\right)^n, \left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right)$.

Definicja 3.5. *(Heinego* granicy właściwej funkcji w punkcie)*
Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0, y_0)$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) *granicę właściwą* g, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... z $S(x_0, y_0)$ zbieżnego do (x_0, y_0), ciąg wartości funkcji $f(x_1, y_1)$, $f(x_2, y_2)$, ... jest zbieżny do g. Fakt, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) granicę g zapisujemy w postaci

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = g.$$

Uwaga. W podobny sposób można określić granicę funkcji w punkcie skupienia dowolnego zbioru na płaszczyźnie. Z definicji granicy wynika, że funkcja f nie ma granicy w punkcie (x_0, y_0), jeżeli z sąsiedztwa $S(x_0, y_0)$ można wybrać dwa ciągi (x'_n, y'_n), (x''_n, y''_n) takie, że $\lim\limits_{n\to\infty} (x'_n, y'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (x''_n, y''_n) = (x_0, y_0)$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n, y''_n)$.

Ćwiczenie 3.6. Korzystając z definicji granicy uzasadnić równości:
(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{2x - y}{x^2 + y^2} = 0$; (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(-3,4)} \sqrt{x^2 + y^2} = 5$.

Ćwiczenie 3.7. Uzasadnić, że nie istnieją granice:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$; (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$;

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\sin^2 x + \sin^2 y}$; (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2 - y^2}{(x-1)^4 + (y-1)^4}$;

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x + y}$; (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^6}{y^2 - 1}$;

(g*) $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,0)} \dfrac{\sin x}{\sin y}$; (h*) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,-3)} \dfrac{xy + 12}{x^2 + y^2 - 25}$.

Uwaga. W ćwiczeniu punkt (x, y) dąży do punktu granicznego pozostając w dziedzinie funkcji.

Ćwiczenie 3.8. Niech $f(x, y) = xy^2 / \left(x^2 + y^4\right)$. Pokazać, że dla każdego ciągu postaci $(x_n, y_n) = (1/n, a/n)$ $(a \in \mathbb{R})$, mamy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0$. Czy funkcja f ma granicę w punkcie $(0, 0)$?

Definicja 3.9. *(Heinego granicy niewłaściwej funkcji w punkcie)*
• Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0, y_0)$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) *granicę niewłaściwą* ∞, gdy dla dowolnego ciągu argumentów (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... z $S(x_0, y_0)$ zbieżnego do (x_0, y_0), ciąg wartości funkcji $f(x_1, y_1)$, $f(x_2, y_2)$, ... jest rozbieżny do ∞. Fakt ten zapisujemy symbolicznie

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \infty.$$

*Eduard Heinrich Heine (1821-1881), matematyk niemiecki.

• Analogicznie definiujemy i zapisujemy *granicę niewłaściwą* $-\infty$ funkcji f w punkcie (x_0, y_0).

Uwaga. Podobnie można określić granice niewłaściwe funkcji w punkcie skupienia jej dziedziny.

Ćwiczenie 3.10. Korzystając z definicji granicy niewłaściwej funkcji uzasadnić równości:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{x^4+y^4} = \infty$; (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \ln\big((x-1)^2+y^2\big) = -\infty$.

TWIERDZENIE 3.11. *(o arytmetyce granic funkcji)*
Jeżeli funkcje f i g mają granice właściwe w punkcie (x_0, y_0), to

(**a**) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big[f(x,y)+g(x,y)\big] = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) + \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$,

(**b**) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big[f(x,y)-g(x,y)\big] = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) - \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$,

(**c**) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big[f(x,y)\cdot g(x,y)\big] = \left[\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\right]\cdot\left[\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)\right]$,

(**d**) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)}$, o ile $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) \neq 0$.

Uwaga. W twierdzeniu dopuszczalne są granice niewłaściwe, o ile wyniki odpowiednich działań z takimi symbolami są oznaczone. Do znajdowania granic funkcji wielu zmiennych można stosować twierdzenia o dwóch i o trzech funkcjach, analogiczne do takich twierdzeń dla funkcji jednej zmiennej. Warto wiedzieć, że przy obliczaniu granic funkcji w punkcie $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ wygodnie jest podstawić $(x,y) = (x_0,y_0)+(s,t)$. Wówczas

$$(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0) \iff (s,t) \longrightarrow (0,0)\,.$$

Ćwiczenie 3.12. Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \big(2x-4y^2+1\big)$; (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \big(x^2+3y^2-xy\big)$;

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2-3y^2+1}{3x^2+2y^2-1}$; (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{x+y}{xy}$;

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \dfrac{y}{\sqrt{x+y}}$; (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})} \dfrac{\sin(x+y)}{3x-2y}$;

(g) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,-1)} \dfrac{2xy+z^2}{x^2+y^2-z^2}$; (h) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,0,2)} \ln\dfrac{x^2+z^2}{x+y+z}$.

Ćwiczenie 3.13. Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$; (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$;

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\cos\dfrac{1}{|x|+|y|}$; (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{\sin x^2 y}{x^2}$;

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^3-y^3}{y-x}$; (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$;

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$; (h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(x^4-y^4\right)}{x^2+y^2}$;

(i) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2y^2z^2+1}-1}{x^2+y^2+z^2}$; (j*) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^4+y^6+z^8}{x^2+y^2+z^2}$.

Definicja 3.14. *(funkcja ciągła w punkcie)*
Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O\left(x_0,y_0\right)$. Mówimy, że funkcja f jest *ciągła* w punkcie (x_0,y_0) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f\left(x_0,y_0\right).$$

Ćwiczenie* 3.15. Pokazać, że funkcja

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

jest ciągła wzdłuż każdej prostej przechodzącej przez punkt $(0,0)$, ale nie jest ciągła w tym punkcie.

TWIERDZENIE 3.16. *(o ciągłości sumy, iloczynu i ilorazu funkcji)*

• Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie (x_0,y_0), to w tym punkcie ciągłe są także funkcje:

$$f+g, \quad f+g, \quad f\cdot g, \quad \frac{f}{g}, \text{ o ile } g\left(x_0,y_0\right)\neq 0.$$

• Jeżeli funkcja h jest ciągła w punkcie $\left(f\left(x_0,y_0\right),g\left(x_0,y_0\right)\right)$, to funkcja złożona $h\left(f(x,y),g(x,y)\right)$ jest ciągła w punkcie $\left(x_0,y_0\right)$.

Definicja 3.17. *(funkcja ciągła na zbiorze otwartym)*
Mówimy, że funkcja jest *ciągła na zbiorze otwartym* na płaszczyźnie, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Uwaga. W podobny sposób można zdefiniować ciągłość funkcji w punkcie skupienia dowolnego zbioru na płaszczyźnie oraz ciągłość na tym zbiorze.

Ćwiczenie 3.18. Znaleźć zbiory punktów ciągłości funkcji:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x^2+y^2} & \text{dla} \quad x^2+y^2 < 1, \\ x^2+y^2-1 & \text{dla} \quad x^2+y^2 \geqslant 1; \end{cases}$

(b) $g(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{dla} \quad x > 0, \ y \in \mathbb{R} \\ \sqrt{x^2+y^2} & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \ y \in \mathbb{R}; \end{cases}$

(c) $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2-y^2} & \text{dla} \quad |x| \neq |y|, \\ 2 & \text{dla} \quad |x| = |y|. \end{cases}$

TWIERDZENIE 3.19. *(Weierstrassa[†] o osiąganiu kresów)*
Jeżeli funkcja f jest ciągła na zbiorze D domkniętym i ograniczonym na płaszczyźnie, to istnieją punkty $(a,b) \in D$ oraz $(c,d) \in D$, dla których zachodzą równości

$$f\,(a,b) = \sup_{(x,y)\in D} f(x,y) \quad \text{oraz} \quad f\,(c,d) = \inf_{(x,y)\in D} f(x,y).$$

Ćwiczenie 3.20. Uzasadnić, że poniższe zagadnienia optymalizacyjne mają rozwiązania:

(a) wśród prostopadłościanów wpisanych w kulę o promieniu R znaleźć ten, który ma największą objętość;

(b*) wśród trójkątów opisanych na kole o promieniu R znaleźć ten, który ma najmniejsze pole;

(c*) w sześcianie znaleźć punkt taki, że suma jego odległości od wierzchołków jest najmniejsza;

(d*) każda bryła materialna ma oś, względem której jej moment bezwładności jest najmniejszy;

(e*) wśród prostopadłościanów o ustalonej objętości znaleźć ten, który ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej.

4. Pochodne cząstkowe funkcji

Definicja 4.1. *(pochodne cząstkowe pierwszego rzędu)*
Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0, y_0). *Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji f względem x* w punkcie (x_0, y_0) określamy wzorem:

$$f'_x\,(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Podobnie jest określona *pochodna cząstkowa pierwszego rzędu funkcji f względem y* w punkcie (x_0, y_0) :

$$f'_y\,(x_0, y_0) \ = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\,(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

[†]Karl Weierstrass (1815-1897), matematyk niemiecki.

Pochodne te oznacza się także tradycyjnymi symbolami odpowiednio $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Uwaga. Jeżeli granica określająca pochodną cząstkową jest właściwa (niewłaściwa), to mówimy, że pochodna jest właściwa (niewłaściwa). Jeżeli granica nie istnieje, to mówimy, że nie istnieje także pochodna cząstkowa.

Ćwiczenie 4.2. Korzystając z definicji obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanych funkcji we wskazanych punktach:

(a) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$, $(x_0, y_0) = (-1, 1)$;

(b) $f(x, y) = y \sin x$, $(x_0, y_0) = (0, \pi)$;

(c) $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$;

(d) $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$;

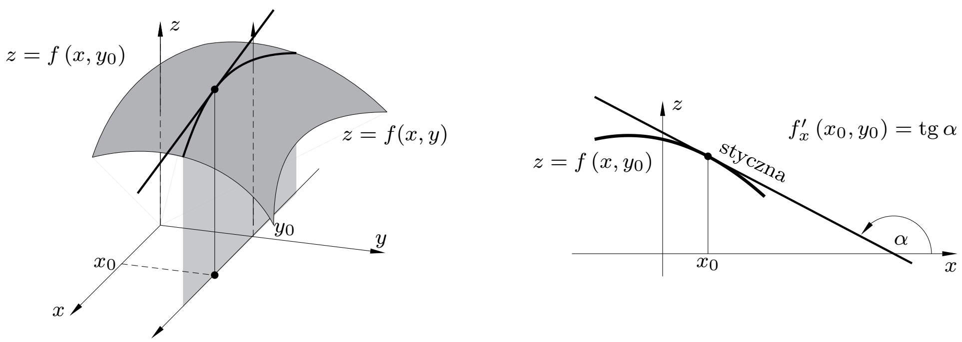
(e) $g(x, y, z) = x + 2xy - 3xyz$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$;

(f) $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^4 - z^6}$, $(x_0, y_0, z_0) = (-2, 1, 0)$.

Interpretacja geometryczna pochodnych cząstkowych

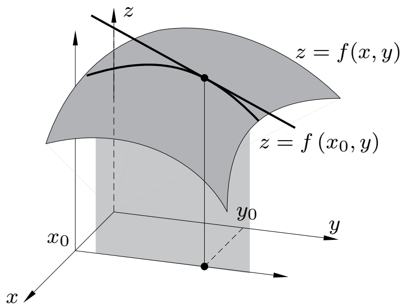
Niech funkcja $z = f(x, y)$ ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0). Ponadto niech α oznacza kąt nachylenia stycznej do krzywej otrzymanej w wyniku przekroju wykresu funkcji f płaszczyzną $y = y_0$ w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, do płaszczyzny xOy oraz niech β oznacza kąt nachylenia stycznej do krzywej otrzymanej w wyniku przekroju wykresu funkcji f płaszczyzną $x = x_0$. Wtedy

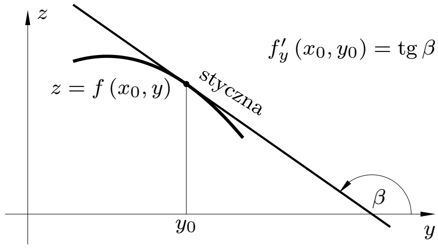
$$f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha, \quad f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta.$$



Rys. 4.1. Interpretacja geometryczna pochodnej cząstkowej $f'_x(x_0, y_0)$

Pochodna cząstkowa $f'_x(x_0, y_0)$ jest miarą lokalnej szybkości wzrostu funkcji f względem zmiennej x przy ustalonej wartości zmiennej y. Podobnie jest dla pochodnej cząstkowej $f'_y(x_0, y_0)$.





Rys. 4.2. Interpretacja geometryczna pochodnej cząstkowej $f'_y\,(x_0, y_0)$

Uwaga. Odmiennie niż dla funkcji jednej zmiennej wygląda związek między ciągłością funkcji a istnieniem pochodnych cząstkowych. Funkcja dwóch zmiennych może mieć w punkcie obie pochodne cząstkowe, ale nie musi być w tym punkcie ciągła. Ilustruje to poniższe ćwiczenie.

Ćwiczenie 4.3. Sprawdzić, że podane funkcje mają w punkcie $(x_0, y_0) = (0, 0)$ obie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu, ale nie są w tym punkcie ciągłe:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad xy = 0, \\ 0 & \text{dla} \quad xy \neq 0; \end{cases}$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Ćwiczenie 4.4. Sprawdzić, że podane funkcje są ciągłe we wskazanych punktach, ale nie mają tam pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$;

(b) $f(x,y) = |x| + |y-1|$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

Definicja 4.5. *(pochodne cząstkowe pierwszego rzędu na zbiorze otwartym)*
Jeżeli funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w każdym punkcie zbioru otwartego $D \subset \mathbb{R}^2$, to funkcje

$$f'_x(x,y), \qquad f'_y(x,y), \qquad \text{gdzie} \quad (x,y) \in D,$$

nazywamy *pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu funkcji f na zbiorze D* i oznaczamy odpowiednio przez f'_x, f'_y lub tradycyjnie $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$.

Uwaga. Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej względem jednej zmiennej pozostałe zmienne traktujemy jak stałe. Operację obliczania pochodnej funkcji $f(x, y)$ po x lub y oznaczamy odpowiednio przez $[f(x,y)]'_x$, $[f(x,y)]'_y$ albo tradycyjnie odpowiednio przez $\dfrac{\partial}{\partial x}\,[f(x,y)]$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\,[f(x,y)]$. Do wyznaczania pochodnych cząstkowych można stosować reguły różniczkowania funkcji jednej zmiennej, tj. wzory na pochodne sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu oraz złożenia funkcji.

Ćwiczenie 4.6. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji:

(a) $f(x,y) = 2x^2 - y^2 + 1$; (b) $f(x,y) = x \ln\left(y^2+1\right)$;

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$; (d) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{xy+1}$;

(e) $f(x,y) = \dfrac{e^x}{\ln(x+y)}$; (f) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{xy}{x+y}$;

(g) $f(x,y) = \sin^2\left(x - y^2\right)$; (h) $f(x,y) = x^y$;

(i) $g(x,y,z) = 1 + xy + yz - x^2 + z$; (j) $g(x,y,z) = y - \sqrt{x^2+z^3}$;

(k) $g(x,y,z) = \dfrac{x^2 \sin y}{\cos y - \sin z}$; (l) $g(x,y,z) = \sin\left(x \operatorname{tg}\left(y \cos z\right)\right)$;

(m) $g(x,y,z) = \sqrt[3]{\operatorname{arc\,tg}\left(x + e^{yz}\right)}$; (n*) $g(x,y,z) = x^{y^z}$.

Ćwiczenie 4.7. Zakładając, że funkcje p i q mają pochodne właściwe obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji:

(a) $f(x,y) = p(x) + q(y)$; (b) $f(x,y) = p(x)q(y)$; (c) $f(x,y) = \dfrac{p(x)}{q(y)}$;

(d) $f(x,y) = p(x) \sin q(y)$; (e) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\left[p(x)q(y)\right]$; (f) $f(x,y) = [p(x)]^{q(y)}$.

Definicja 4.8. *(pochodne cząstkowe drugiego rzędu)*
Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe f'_x, f'_y przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0, y_0). *Pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji* f w punkcie (x_0, y_0) określamy wzorami:

$$f''_{xx}(x_0,y_0) = \left[f'_x\right]'_x(x_0,y_0), \quad f''_{xy}(x_0,y_0) = \left[f'_y\right]'_x(x_0,y_0),$$

$$f''_{yx}(x_0,y_0) = \left[f'_x\right]'_y(x_0,y_0), \quad f''_{yy}(x_0,y_0) = \left[f'_y\right]'_y(x_0,y_0).$$

Pochodne te tradycyjnie oznacza się także odpowiednio przez

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0).$$

Jeżeli funkcja f ma pochodne cząstkowe drugiego rzędu w każdym punkcie zbioru otwartego $D \subset \mathbb{R}^2$, to funkcje

$$f''_{xx}(x,y), \quad f''_{xy}(x,y), \quad f''_{yx}(x,y), \quad f''_{yy}(x,y), \quad \text{gdzie } (x,y) \in D,$$

nazywamy pochodnymi cząstkowymi drugiego rzędu funkcji f na zbiorze D i oznaczamy odpowiednio przez f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}.

Ćwiczenie 4.9. Obliczyć pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji:

(a) $f(x,y) = 2x - y + 1$; (b) $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^3$;

(c) $f(x,y) = x^3 + x^2y^2 - y^4$; (d) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{xy}$;

(e) $f(x,y) = \sin xy$; (f) $f(x,y) = \ln(x-y)$;

(g) $f(x,y) = x\ln y + y\ln x$; (h) $f(x,y) = \arcsin\dfrac{x}{y}$;

(i) $g(x,y,z) = x^2 + y^3x - 2x^3y^2z^5$; (j) $g(x,y,z) = \cos(x+2y+3z)$;

(k) $g(x,y,z) = x^{yz}$; (l) $g(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x+y-z}$.

Ćwiczenie 4.10. Pokazać, że funkcja f spełnia równanie Lapalce'a[‡] $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$:

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2$; (b) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$;

(c) $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$; (d) $f(x,y) = \cos x \operatorname{ch} y$.

Definicja 4.11. *(pochodne cząstkowe wyższych rzędów)*
Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe rzędu $n \geqslant 2$ na otoczeniu punktu (x_0, y_0). Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0) pochodnych cząstkowych rzędu n funkcji f nazywamy *pochodnymi cząstkowymi rzędu* $n+1$ *funkcji* f w punkcie (x_0, y_0). Do oznaczania tych pochodnych stosujemy symbole analogiczne do pochodnych cząstkowych drugiego rzędu. Np. pochodną cząstkową 5-tego rzędu funkcji f w punkcie (x_0, y_0), powstałą w wyniku 3-krotnego różniczkowania względem zmiennej x i następnie 2-krotnego różniczkowania względem zmiennej y, gdzie $k + l = n$, oznaczamy przez

$$f'''''_{yyxxx} \quad \text{lub krótko} \quad f^{(5)}_{y^2x^3}.$$

Jeżeli funkcja f ma pochodne cząstkowe rzędu n w każdym punkcie zbioru otwartego, to mówimy, że na tym zbiorze określone są pochodne cząstkowe rzędu n funkcji f. Pochodne cząstkowe, w których występuje różniczkowanie względem różnych zmiennych, nazywamy *pochodnymi cząstkowymi mieszanymi.*

Ćwiczenie 4.12. Dla podanych funkcji obliczyć wskazane pochodne cząstkowe:

(a) $f(x,y) = e^{xy}$, f'''_{xxy}; (b) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, $\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}$;

(c) $f(x,y) = \dfrac{\sin x}{\sin y}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$; (d) $f(x,y) = \cos\dfrac{y}{x}$, f'''_{xyy};

(e) $g(x,y,z) = x^2y^3z^4$, $\dfrac{\partial^5 g}{\partial x^2 \partial z \partial y^2}$; (f) $g(x,y,z) = \ln(x+2y-3z)$, g''''_{xyzz}.

TWIERDZENIE 4.13. *(Schwarza[§] o pochodnych mieszanych)*
Jeżeli pochodne cząstkowe f''_{xy}, f''_{yx} są ciągłe w punkcie (x_0, y_0), to są równe, tj.

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

[‡]Pierre Simon Laplace (1749 – 1827), matematyk francuski.
[§]Herman Amandus Schwarz (1843-1921), matematyk niemiecki.

Uwaga. Prawdziwe są także analogiczne równości dla pochodnych mieszanych wyższych rzędów.

Ćwiczenie 4.14. Dla podanych funkcji sprawdzić równości między podanymi pochodnymi mieszanymi:

(a) $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$, $\quad f''_{xy}=f''_{yx}$;

(b) $f(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{1}{y}$, $\quad f'''_{yyx}=f'''_{yxy}=f'''_{xyy}$;

(c) $f(x,y)=x^2\sin y$, $\quad f'''_{xxy}=f'''_{xyx}=f'''_{yxx}$;

(d) $g(x,y,z)=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $\quad g''_{xz}=g'_{zx}$;

(e) $g(x,y,z)=x^2y+zy^3$, $\quad g'''_{xyz}=g'''_{xzy}=g'''_{yzx}=g'''_{yxz}=g'''_{zxy}=g'''_{zyx}$.

Ćwiczenie 4.15. Sprawdzić, czy pochodne cząstkowe mieszane drugiego rzędu podanych funkcji w punkcie $(x_0,y_0)=(0,0)$ istnieją i są równe:

(b) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^6-y^3}$;

(a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0);\end{cases}$

(c) $f(x,y)=\begin{cases}x^4-y^4 & \text{dla } |x|\leqslant|y|,\\ y^4-x^4 & \text{dla } |x|>|y|;\end{cases}$

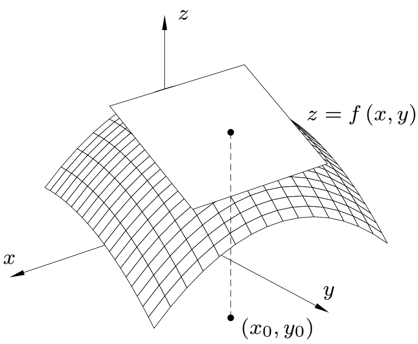
(d) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^3}{x^4+y^4} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

5. Płaszczyzna styczna i różniczka funkcji

FAKT 5.1. *(równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji)*

Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ w punkcie (x_0,y_0). Wówczas *płaszczyzna styczna* do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ ma postać:

$$z-f\left(x_0,y_0\right)=f'_x(x_0,y_0)\left(x-x_0\right)+f'_y(x_0,y_0)\left(y-y_0\right).$$



Rys. 5.1. Płaszczyzna styczna do wykresu funkcji dwóch zmiennych

Uwaga. Równanie płaszczyzny stycznej w punkcie (x_0, y_0, z_0) powierzchni opisanej przez warunek $F(x, y, z) = 0$ ma postać:

$$F'_x\,(x_0, y_0, z_0)\,(x - x_0) + F'_y\,(x_0, y_0, z_0)\,(y - y_0) + F'_z\,(x_0, y_0, z_0)\,(z - z_0) = 0,$$

o ile występujące tu pochodne cząstkowe są ciągłe w punkcie (x_0, y_0, z_0) i nie zerują się jednocześnie.

Ćwiczenie 5.2. Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach tych wykresów:
(a) $f(x, y) = 2x - 3y + 2$, $(-1, 0, 0)$; (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(1, -1, 2)$;
(c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(3, 4, 5)$; (d) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;
(e) $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{1 + y^2}$, $\left(1, 0, \frac{\pi}{4}\right)$; (f) $f(x, y) = x^y$, $(2, 4, 16)$.

Ćwiczenie 5.3. Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej w punkcie:
(a) $(1, 1, 1)$ do powierzchni o równaniu $x^4 - x + y^3 - y + z^5 - z = 0$;
(b) $(0, 0, 0)$ do powierzchni o równaniu $e^x + x + e^y + y + e^z + z - 3 = 0$.

Ćwiczenie 5.4.
(a) Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $x^2 + y^4 + z^6 = 18$ w punkcie $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, -1)$.

(b) Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $z = x^4 - 3y^2$, która jest równoległa do płaszczyzny $\pi: \; 4x + 12y - z - 5 = 0$.

(c) Napisać równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $z = 1 + x^2 + y^2$, która jest prostopadła do prostej $l: \; 3x = 2y = z$.

(d) Na wykresie funkcji $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ znaleźć punkt, który jest położony najbliżej płaszczyzny $\pi: \; x + 3y + 2z = 36$.

(e*) W $\mathbb{R}^3$ dane są punkty $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$, $C = (1, 2, 3)$. Na powierzchni $z = x^2 + y^2$ znaleźć punkt D taki, aby objętość czworościanu $ABCD$ była najmniejsza.

(f*) Znaleźć wszystkie płaszczyzny styczne do wykresu funkcji $z = x^2 + y^2$, które przechodzą przez punkty $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 3, 0)$.

Definicja 5.5. *(różniczka funkcji)*
Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0). *Różniczką funkcji f* w punkcie (x_0, y_0) nazywamy funkcję $df\,(x_0, y_0)$ zmiennych Δx, Δy określoną wzorem:

$$df\,(x_0, y_0)\,(\Delta x, \Delta y) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Różniczkę funkcji f oznacza się krótko przez df.

Ćwiczenie 5.6. Napisać różniczki podanych funkcji we wskazanych punktach:
(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x_0, y_0) = (3, -4)$;
(b) $g(x,y,z) = xyz^2$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 2)$.

FAKT 5.7. *(zastosowanie różniczki funkcji do obliczeń przybliżonych)*
Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0). Wtedy

$$f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)\left(\Delta x, \Delta y\right),$$

przy czym błąd $\delta\left(\Delta x, \Delta y\right)$ powyższego przybliżenia, tj. różnica $\Delta f - df$, dąży szybciej do 0 niż wyrażenie $\sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2}$. To oznacza, że spełnia równość:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{\delta\left(\Delta x, \Delta y\right)}{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2}} = 0.$$

Uwaga. Wzór ten wykorzystuje się do obliczania przybliżonych wartości skomplikowanych wyrażeń algebraicznych oraz do oceny zmiany wartości funkcji przy niewielkich zmianach argumentów.

Ćwiczenie 5.8. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości wyrażeń:

(a) $(1.02)^4 \cdot (0.97)^2$; (b) $\dfrac{\operatorname{arc\,tg} 1.001}{\arcsin 0.49}$; (c) $(1.04)^{3.01}$;

(d) $\sqrt{\sqrt{630} - \sqrt{80}}$; (e) $\sqrt[3]{(3.03)^3 + (4.04)^3 + (5.05)^3}$; (f) $\left(\sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{17}\right)^2$.

Ćwiczenie 5.9.
(a) Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się objętość V walca o promieniu podstawy $R = 1$ m i wysokości $H = 2$ m, jeżeli jego wysokość zwiększymy o 1 cm, a promień podstawy zmniejszymy o 3 cm?

(b) Ciśnienie gazu w pewnym procesie technologicznym wyraża się wzorem

$$p = \frac{100e^T}{V},$$

gdzie T jest temperaturą gazu, a V jego objętością. Aktualne wartości tych parametrów wynoszą $T = 0^\circ$ C, $V = 300\,\mathrm{m}^3$. Objętość gazu wzrosła o $1\,\mathrm{m}^3$. Obliczyć w przybliżeniu, jak należy zmienić temperaturę gazu, aby jego ciśnienie nie uległo zmianie.

FAKT 5.10. *(zastosowanie różniczki funkcji do szacowania błędów pomiarów)*
Niech wielkości fizyczne x, y, z będą związane zależnością $z = f(x,y)$, gdzie funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu. Ponadto niech Δ_x i Δ_y oznaczają

odpowiednio błędy bezwzględne pomiaru wielkości x i y. Wtedy błąd bezwzględny Δ_z obliczeń wielkości z wyraża się wzorem przybliżonym:

$$\Delta_z \approx \left|f'_x(x_0, y_0)\right| \Delta_x + \left|f'_y(x_0, y_0)\right| \Delta_y,$$

gdzie x_0 oraz y_0 są wynikami pomiaru wielkości x oraz y.

Ćwiczenie 5.11.

(a) Przy pomocy menzurki można zmierzyć objętość ciała z dokładnością $\Delta_V = 0.1\,\mathrm{cm}^3$, a przy pomocy wagi sprężynowej można ustalić jego masę z dokładnością $\Delta_M = 1$ g. Objętość ciała zmierzona tym sposobem wynosi $V_0 = 25\ \mathrm{cm}^3$, a masa $M_0 = 200$ g. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć gęstość γ tego ciała?

(b) Boki trójkątnego kawałka ziemi zmierzone z dokładnością 1 m wynoszą $a_0 = 250\,\mathrm{m}$, $b_0 = 400\,\mathrm{m}$. Kąt między tymi bokami zmierzony z dokładnością 0.01 rad wynosi $\alpha_0 = \pi/3$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole P tego kawałka ziemi?

(c) Współczynniki a, b równania kwadratowego $x^2 + ax + b = 0$, podane z dokładnościami odpowiednio $\Delta_a = 0.01$ i $\Delta_b = 0.1$, wynoszą $a = -3$ i $b = 2$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pierwiastki x_1, x_2 tego równania?

6. Pochodne cząstkowe funkcji złożonych

TWIERDZENIE 6.1. *(o pochodnej funkcji złożonej)*

Niech funkcje $x = x(t)$, $y = y(t)$ mają pochodne właściwe w punkcie t_0 oraz funkcja $z = f(x, y)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie $(x(t_0), y(t_0))$. Wtedy funkcja złożona $F(t) = f(x(t), y(t))$ ma pochodną właściwą w punkcie t_0 oraz

$$F' = f'_x \cdot x' + f'_y \cdot y',$$

gdzie pochodne x', y' są obliczone w punkcie t_0, a pochodne cząstkowe f'_x, f'_y w punkcie $(x(t_0), y(t_0))$. W zapisie tradycyjnym powyższy wzór ma postać

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Uwaga. Wzór ten można zapisać w formie iloczynu macierzy:

$$[F'] = \begin{bmatrix} f'_x & f'_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 6.2. Korzystając z powyższych wzorów obliczyć pochodną funkcji złożonej $F(t) = f(x(t), y(t))$ w punkcie t_0, jeżeli:

(a) $f(x, y) = xy^2 - y,\ \ x = e^{-t},\ \ y = e^{2t},\ \ t_0 = 0;$

(b) $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y},\ \ x = \sin t,\ \ y = \cos t,\ \ t_0 = \dfrac{\pi}{4};$

(c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2},\ \ x = t,\ \ y = \sqrt{t},\ \ t_0 = 2;$

(d) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y},\ \ x = t,\ \ y = 1,\ \ t_0 = 0.$

Ćwiczenie 6.3. Korzystając z reguł różniczkowania funkcji obliczyć pochodne $F'(t)$, $F''(t)$ funkcji złożonych:

(a) $F = f(x, y)$, gdzie $x = \sin t$, $y = \cos t$;

(b) $F = g(x, y, z)$, gdzie $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

TWIERDZENIE 6.4. *(o pochodnych cząstkowych funkcji złożonej)*
Niech funkcje $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ mają pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (u_0, v_0), a funkcja $z = f(x, y)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$. Wtedy funkcja złożona $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ ma w punkcie (u_0, v_0) pochodne cząstkowe pierwszego rzędu wyrażone wzorami:

$$F'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u, \qquad F'_v = f'_x \cdot x'_v + f'_y \cdot y'_v,$$

gdzie pochodne cząstkowe x'_u, x'_v, y'_u, y'_v są obliczone w punkcie (u_0, v_0), a pochodne cząstkowe f'_x, f'_y w punkcie $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$. W zapisie tradycyjnym powyższy wzór ma postać

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v},$$

Uwaga. Powyższe wzory można zapisać w formie iloczynu macierzy:

$$\begin{bmatrix} F'_u & F'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_x & f'_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix}.$$

Jeżeli f jest funkcją tylko jednej zmiennej, to reguły różniczkowania funkcji złożonej $F(u, v) = f(x(u, v))$ przyjmują postać:

$$F'_u = f' \cdot x'_u, \quad F'_v = f' \cdot x'_v.$$

Ćwiczenie 6.5. Korzystając z powyższych wzorów obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji złożonej $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ w punkcie (u_0, v_0), jeżeli:

(a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, $x = u + v$, $y = u - v$, $(u_0, v_0) = (1, 1)$;

(b) $f(x, y) = \sin(x + y)$, $x = uv$, $y = \dfrac{u}{v}$, $(u_0, v_0) = (\pi, 1)$.

Ćwiczenie 6.6. Korzystając z reguł różniczkowania funkcji obliczyć pochodne cząstkowe F'_u oraz F'_v dla podanych funkcji złożonych:

(a) $F = f(x)$, gdzie $x = e^{\operatorname{arc\,tg}(u/v)}$;

(b) $F = f(x, y)$, gdzie $x = u \cos v$, $y = u \sin v$;

(c) $F = f(x, y, z)$, gdzie $x = uv$, $y = u + v$, $z = \dfrac{u}{v}$.

Ćwiczenie 6.7. Obliczyć podane pochodne cząstkowe dla wskazanych funkcji:

(a) z', $z = F(x, y(x))$; (b) z'_u, z'_v $z = F(x(v), y(u))$;

(c) z'_u, z'_v, $z = F(t(u, v))$; (d*) z''_{uu}, z''_{vv}, z''_{uv}, $z = F(x(u, v), y(u, v))$.

Ćwiczenie* 6.8. Funkcja F spełnia warunek $F''_{xx}+F''_{yy}\equiv 0$. Pokazać, że podane funkcje także spełniają ten warunek:

(a) $f(u,v)=F\left(u^2-v^2,2uv\right)$; (b) $f(u,v)=F\left(\dfrac{u}{u^2+v^2},\dfrac{v}{u^2+v^2}\right)$.

7. Pochodna kierunkowa funkcji

Definicja 7.1. *(pochodna kierunkowa funkcji)*

Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0,y_0). *Pochodną kierunkową* funkcji f w punkcie (x_0,y_0) w kierunku wersora $\boldsymbol{v}=(v_x,v_y)$ określamy wzorem:

$$f'_{\boldsymbol{v}}\left(x_0,y_0\right)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f\left(x_0+tv_x,y_0+tv_y\right)-f(x_0,y_0)}{t}.$$

Pochodną tę oznacza się tradycyjnie symbolem $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\left(x_0,y_0\right)$.

Uwaga. Pochodna kierunkowa jest przeniesieniem na funkcje wielu zmiennych pojęcia pochodnej jednostronnej funkcji jednej zmiennej. Niektórzy autorzy przyjmują, że w definicji pochodnej kierunkowej t dąży do 0 z obu stron. Wtedy pochodna kierunkowa jest uogólnieniem pojęcia pochodnej cząstkowej funkcji. Np. dla funkcji f dwóch zmiennych oraz dla wersorów $\boldsymbol{i}=(1,0)$ i $\boldsymbol{j}=(0,1)$ mamy

$$f'_{\boldsymbol{i}}=f'_x \quad \text{oraz} \quad f'_{\boldsymbol{j}}=f'_y.$$

Ćwiczenie 7.2. Korzystając z definicji obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach dla wymienionych wersorów:

(a) $f(x,y)=2x^2+y^2,\ (x_0,y_0)=(1,1),\ \boldsymbol{v}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

(b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\ (x_0,y_0)=(0,0),\ \boldsymbol{v}=\left(-\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$;

(c) $f(x,y)=xy,\ (x_0,y_0)=(1,2),\ \boldsymbol{v}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

(d) $g(x,y,z)=x^2-2yz,\ (x_0,y_0,z_0)=(1,0,-1),\ \boldsymbol{v}=\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$;

(e) $g(x,y,z)=e^{x+y+z},\ (x_0,y_0,z_0)=(0,0,0),\ \boldsymbol{v}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Ćwiczenie* 7.3. Pokazać, że funkcja

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

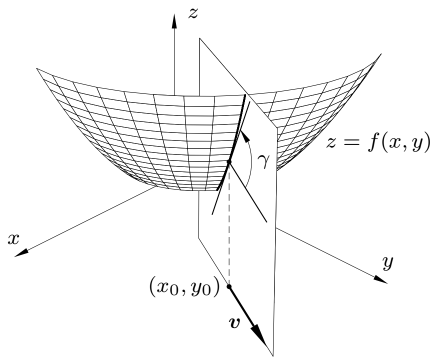
ma pochodną kierunkową $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0)$ w kierunku dowolnego wersora, ale nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$.

Interpretacja geometryczna pochodnej kierunkowej

Niech γ oznacza kąt nachylenia do płaszczyzny xOy półstycznej do krzywej otrzymanej w wyniku przekroju wykresu funkcji f półpłaszczyzną przechodzącą przez prostą $x = x_0,\ y = y_0$ oraz równoległą do wersora $\boldsymbol{v}$. Wtedy

$$f'_{\boldsymbol{v}}(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \gamma.$$

Pochodna kierunkowa określa szybkość zmiany wartości funkcji f w kierunku $\boldsymbol{v}$.



Rys. 7.1. Interpretacja geometryczna pochodnej kierunkowej funkcji

Definicja 7.4. *(gradient funkcji)*
Gradientem funkcji f w punkcie (x_0, y_0) nazywamy wektor określony wzorem:

$$\mathbf{grad}\, f\,(x_0, y_0) = \left(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)\right).$$

Gradient funkcji f oznaczamy także symbolem $\nabla f\,(x_0, y_0)$.

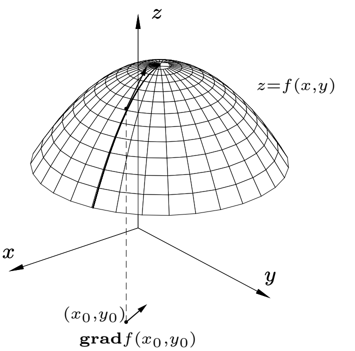
Ćwiczenie 7.5. Obliczyć gradienty podanych funkcji we wskazanych punktach:
(a) $f(x,y) = x^3 + y^3,\ (x_0, y_0) = (-1, 1)$;
(b) $f(x,y) = \sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right),\ (x_0, y_0) = (3, 4)$;
(c) $g(x,y,z) = \dfrac{xy^2}{z^3},\ (x_0, y_0, z_0) = (16, -3, 2)$.

Ćwiczenie 7.6. Funkcje f i g mają pochodne cząstkowe pierwszego rzędu. Pokazać, że:
(a) $\mathbf{grad}\,(af + bg) = a\,\mathbf{grad}\, f + b\,\mathbf{grad}\, g$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$;
(b) $\mathbf{grad}\,(f \cdot g) = \mathbf{grad}\, f \cdot g + f \cdot \mathbf{grad}\, g$;
(c) $\mathbf{grad}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{1}{g^2}\left(\mathbf{grad}\, f \cdot g - f \cdot \mathbf{grad}\, g\right)$, o ile $g \neq 0$.

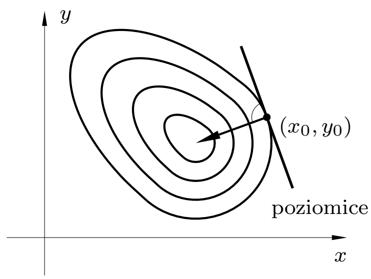
Interpretacja geometryczna gradientu

1. Gradient funkcji w punkcie wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji w tym punkcie.

2. Gradient funkcji w punkcie jest prostopadły do poziomicy funkcji przechodzącej przez ten punkt.



Rys. 7.2. Gradient wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji



Rys. 7.3. Gradient funkcji jest prostopadły do poziomicy

Ćwiczenie 7.7.
(a) Temperatura w zbiorze $V = \{(x, y, z) : \ 0 \leqslant x, y, z \leqslant \pi\}$ jest określona wzorem:

$$T(x, y, z) = 10\cos(x - y) + 20\sin(x + z).$$

Znaleźć kierunek jej najszybszego wzrostu w punkcie $(\pi/2, \pi/2, \pi/2)$.

(b) Sprawdzić bezpośrednio, że gradient funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$ jest prostopadły do jej poziomic.

TWIERDZENIE 7.8. *(wzór do obliczania pochodnej kierunkowej)*
Niech pochodne cząstkowe f'_x, f'_y będą ciągłe w punkcie (x_0, y_0) oraz niech $\boldsymbol{v}$ oznacza wersor na płaszczyźnie. Wtedy

$$f'_{\boldsymbol{v}}(x_0, y_0) = \mathbf{grad}\, f\,(x_0, y_0) \circ \boldsymbol{v}.$$

Ćwiczenie 7.9. Korzystając z powyższego wzoru obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x, y) = (x + 2y)^2,\ (x_0, y_0) = (1, 2),\ \boldsymbol{v} = (1, 0);$

(b) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ (x_0, y_0) = (1, 2),\ \boldsymbol{v} = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right);$

(c) $f(x, y) = e^{x+y},\ (x_0, y_0) = (1, -1),\ \boldsymbol{v} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right);$

(d) $g(x, y, z) = xy + yz + xz,\ (x_0, y_0, z_0) = (1, -2, 1),\ \boldsymbol{v} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right);$

(e) $g(x,y,z)=\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$, $(x_0,y_0,z_0)=(3,4,5)$, $\boldsymbol{v}=\left(-\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

Ćwiczenie 7.10. Wyjaśnić dlaczego pochodna kierunkowa funkcji $z=\sqrt[3]{x^3+8y^3}$, w punkcie $(x_0,y_0)=(0,0)$ i kierunku $\boldsymbol{v}=\left(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2\right)$ wyznaczona z definicji jest inna niż pochodna obliczona według powyższego wzoru.

8. Wzór Taylora*. Ekstrema funkcji

Definicja 8.1*. *(różniczka n–tego rzędu funkcji dwóch zmiennych)*
Niech funkcja f ma na otoczeniu punktu (x_0,y_0) ciągłe pochodne cząstkowe do rzędu n włącznie. *Różniczką n-tego rzędu* funkcji f w punkcie (x_0,y_0) nazywamy funkcję $d^n f\,(x_0,y_0)$ zmiennych Δx i Δy określoną wzorem:

$$d^n f\,(x_0,y_0)\,(\Delta x,\Delta y) \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f\Bigg|_{(x_0,\,y_0)}.$$

We wzorze tym symbole $\partial/\partial x,\ \partial/\partial y$ oznaczają odpowiednio operacje różniczkowania po zmiennych x i y, natomiast potęgę traktujemy formalnie do otrzymania symboli pochodnych cząstkowych wyższych rzędów. Różniczkę n-tego rzędu funkcji f oznaczamy krótko przez $d^n f$. Dodatkowo przyjmujemy, że $d^0 f=f$.

Ćwiczenie* 8.2. Napisać wzory określające różniczki drugiego, trzeciego i czwartego rzędu dla funkcji dwóch zmiennych.

TWIERDZENIE 8.3*. *(wzór Taylora)*
Niech funkcja f ma na otoczeniu punktu (x_0,y_0) ciągłe pochodne cząstkowe do rzędu n włącznie oraz niech (x,y) będzie dowolnym punktem z tego otoczenia. Wtedy na odcinku łączącym punkty (x_0,y_0) i (x,y) istnieje punkt (x_c,y_c) taki, że

$$f\,(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{df\,(x_0,y_0)\,(x-x_0,y-y_0)}{1!}+\frac{d^2f\,(x_0,y_0)\,(x-x_0,y-y_0)}{2!}$$
$$+\ldots+\frac{d^{n-1}f\,(x_0,y_0)\,(x-x_0,y-y_0)}{(n-1)!}+\frac{d^n f\,(x_c,y_c)\,(x-x_0,y-y_0)}{n!}.$$

Uwaga*. Równość w tezie twierdzenia nazywamy *wzorem Taylora* dla funkcji dwóch zmiennych. Ostatni składnik w tym wzorze nazywamy *n-tą resztą* i oznaczamy przez R_n. Dla punktu $(x_0,y_0)=(0,0)$ powyższą równość nazywamy *wzorem Maclaurina.*

Ćwiczenie* 8.4. Napisać rozwiniętą postać wzoru Taylora dla funkcji dwóch zmiennych oraz dla:
(a) $n=2$; (b) $n=3$.

Ćwiczenie* 8.5. Napisać wzory Taylora z resztą R_n dla podanych funkcji na otoczeniach wskazanych punktów, jeżeli:

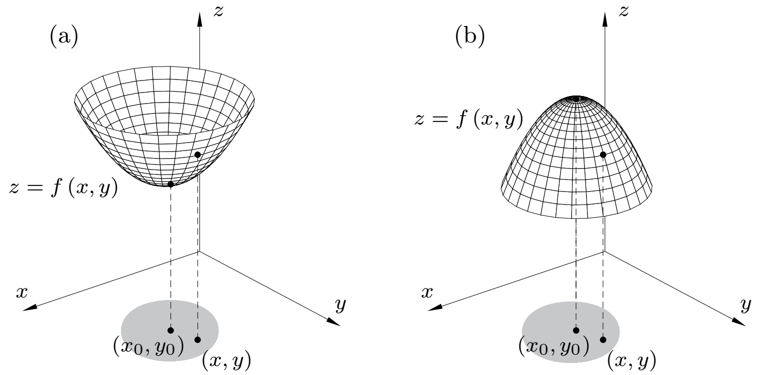
(a) $f(x,y) = x^2y,\ n = 2,\ (x_0, y_0) = (-1, 1)$;

(b) $f(x,y) = x\sin y,\ n = 3,\ (x_0, y_0) = (0, \pi)$.

Definicja 8.6. *(ekstrema lokalne funkcji)*

• Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) *minimum lokalne właściwe* (rys. (a)), jeżeli istnieje sąsiedztwo tego punktu takie, że dla dowolnego (x, y) z tego sąsiedztwa zachodzi nierówność

$$f(x,y) > f(x_0, y_0).$$



Rys. 8.1. Ekstrema lokalne właściwe: (a) minimum, (b) maksimum

• Podobnie mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) *maksimum lokalne właściwe* (rys. (b)), jeżeli istnieje sąsiedztwo tego punktu takie, że dla dowolnego (x, y) z tego sąsiedztwa zachodzi nierówność

$$f(x,y) < f(x_0, y_0).$$

Uwaga. Jeżeli w powyższych definicjach ostre nierówności ($>$, $<$) zastąpimy słabymi ($\geqslant$, $\leqslant$), to wtedy mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) odpowiednio *minimum* i *maksimum lokalne*. Minima i maksima lokalne funkcji (właściwe lub niewłaściwe) nazywamy *ekstremami lokalnymi*. Oczywiście każde ekstremum lokalne właściwe funkcji jest także jej ekstremum lokalnym.

Ćwiczenie 8.7. Korzystając z definicji zbadać, czy podane funkcje mają ekstrema lokalne we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y) = 5 - \left(x^6 + y^4\right),\ (0,0)$;

(b) $f(x,y) = \left(x^2+1\right)^{30}\left(y^2+2\right)^{20},\ (0,0)$;

(c) $f(x,y) = 5|x| + |y+1|,\ (0,-1)$;

(d) $f(x,y) = \sin^2 x + \cos^2(x+y),\ \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

(e) $f(x,y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y,\ (0,0)$;

(f) $f(x,y) = x^4 + y^4 - (xy)^2,\ (0,0)$;

(g) $f(x,y) = x^2 - 2y^2,\ (0,0)$;

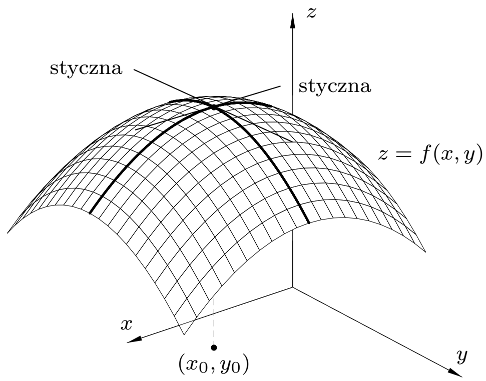
(h) $f(x,y) = (x-y+1)^4 + (x+y-3)^4,\ (1,2)$.

Ćwiczenie* 8.8. Podać przykład funkcji ciągłej dwóch zmiennych, która ma dwa maksima lokalne właściwe, ale nie ma żadnego innego ekstremum lokalnego właściwego. Czy istnieje taka funkcja jednej zmiennej?

TWIERDZENIE 8.9. *(warunek konieczny istnienia ekstremum)*

Jeżeli funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie (x_0, y_0) oraz istnieją pochodne cząstkowe $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$, to

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

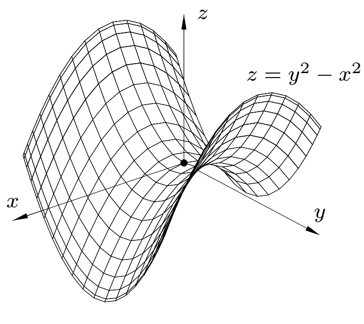


Rys. 8.2. Interpretacja geometryczna warunków koniecznych istnienia ekstremum

Uwaga. Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa. Zerowanie się w punkcie obu pochodnych cząstkowych funkcji nie gwarantuje istnienia ekstremum lokalnego. Np. funkcja $f(x, y) = y^2 - x^2$ spełnia warunki

$$f'_x(0, 0) = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0,$$

ale nie ma ekstremum w punkcie $(0, 0)$ (rysunek). Punkt, w którym obie pochodne cząstkowe funkcji zerują się, nazywamy *punktem stacjonarnym.*



Rys. 8.3. Punkt stacjonarny

Ćwiczenie 8.10. Sprawdzić, że podane funkcje spełniają we wskazanych punktach warunek konieczny istnienia ekstremum, ale nie mają w tych punktach ekstremów lokalnych:

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$; (b) $f(x, y) = x^4 - y^4$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

FAKT 8.11. *(o lokalizacji ekstremów funkcji)*

Funkcja **może mieć** ekstrema tylko w punktach stacjonarnych albo w punktach, w których choć jedna z pochodnych cząstkowych nie istnieje.

TWIERDZENIE 8.12. *(warunek wystarczający ekstremum funkcji dwóch zmiennych)*
Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego na otoczeniu punktu (x_0, y_0). Ponadto niech $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$ oraz

$$H(x_0, y_0) = \det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} (x_0, y_0) > 0.$$

Wtedy funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalne właściwe i jest to minimum, gdy $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ albo maksimum, gdy $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$.

Uwaga. Gdy wyznacznik w założeniu twierdzenia jest ujemny, to funkcja f nie ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalnego. W przypadku, gdy wyznacznik ten jest równy 0, to badanie, czy funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie (x_0, y_0) przeprowadzamy innymi metodami (np. korzystając z definicji). Funkcję H występującą twierdzeniu nazywamy *hessianem*¶.

Ćwiczenie 8.13. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych:

(a) $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 + 6y$;
(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$;
(c) $f(x, y) = xy + \dfrac{x + y}{xy}$;
(d) $f(x, y) = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$;
(e) $f(x, y) = xy(1 - x - y)$;
(f) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy$;
(g) $f(x, y) = xy \ln\left(x^2 + y^2\right)$;
(h) $f(x, y) = (y - x)^2 + (y + 2)^2$;
(i) $f(x, y) = x^4 - y^4$;
(j) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;
(k) $f(x, y) = e^{2+x} + e^{y-x} + e^{1-y}$;
(l) $f(x, y) = \left(x^2 + 1\right)\left(3 - y^2\right)$.

TWIERDZENIE 8.14*. *(warunek wystarczający ekstremum funkcji trzech zmiennych)*
Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego na otoczeniu punktu (x_0, y_0, z_0). Ponadto niech $f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0$, $f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$ oraz

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0, z_0) > 0, \quad B = \det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} (x_0, y_0, z_0) > 0,$$

$$C = \det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{bmatrix} (x_0, y_0, z_0) > 0.$$

Wtedy funkcja f w punkcie (x_0, y_0, z_0) ma minimum lokalne właściwe.

Uwaga*. Gdy $A < 0$, $B > 0$, $C < 0$, to funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0, z_0) maksimum lokalne właściwe. Dla pozostałych wartości A, B, C, o ile $ABC \neq 0$, funkcja f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie (x_0, y_0, z_0). Analogiczną postać ma warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji większej liczby zmiennych.

¶Ludwig Otto Hesse (1811–1874), matematyk niemiecki.

Ćwiczenie* 8.15. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne funkcji trzech zmiennych:
(a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x + 2z$;

(b) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{x+z} + \dfrac{z}{x+y}$ $(x,y,z > 0)$;

(c) $f(x,y,z) = (x+y+z)\, e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}$;

(d) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$ $(x,y,z > 0)$.

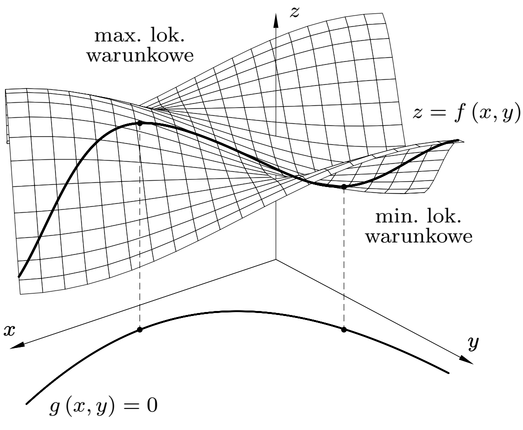
Ćwiczenie* 8.16. Liczbę 4 rozłożyć na cztery dodatnie składniki, aby ich iloczyn był największy.

Definicja 8.17. *(ekstrema warunkowe funkcji)*

• Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) *maksimum lokalne właściwe przy warunku* $g(x,y) = 0$, gdy $g(x_0, y_0) = 0$ oraz istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $f(x,y) < f(x_0, y_0)$ dla każdego $(x,y) \in S((x_0, y_0), \delta)$ spełniającego warunek $g(x,y) = 0$.

• Podobnie mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) *minimum lokalne właściwe przy warunku* $g(x,y) = 0$, gdy $g(x_0, y_0) = 0$ oraz istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $f(x,y) > f(x_0, y_0)$ dla punktu $(x,y) \in S((x_0, y_0), \delta)$ spełniającego warunek $g(x,y) = 0$.

• Analogicznie określa się ekstrema warunkowe dla funkcji trzech zmiennych z jednym lub dwoma ograniczeniami.



Rys. 8.4. Ilustracja maksimum i minimum warunkowego

Algorytm szukania ekstremów warunkowych (metoda wyznaczania zmiennych z warunku)

Ekstremów lokalnych funkcji f dwóch zmiennych przy warunku $g(x,y) = 0$ szukamy postępując według algorytmu:

1. krzywą $\Gamma : g(x,y) = 0$ dzielimy na łuki, które są wykresami funkcji postaci $y = h(x)$, gdzie $x \in I$ lub postaci $x = p(y)$, gdzie $y \in J$,

2. szukamy ekstremów funkcji jednej zmiennej $f(x, h(x))$ na przedziałach I lub funkcji $f(p(y), y)$ na przedziałach J,

3. porównujemy wartości otrzymanych ekstremów na krzywej Γ i ustalamy ekstrema warunkowe.

Ćwiczenie 8.18. Znaleźć ekstrema podanych funkcji, których argumenty spełniają wskazane warunki:

(a) $f(x,y) = xy,\ x + y = 0;$ (b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2},\ |y| = 1;$

(c) $f(x,y) = 2x - 2xy + y^2,\ y = x^2;$ (d) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ xy = 4;$

(e) $f(x,y) = x^2 - 2xy,\ x - y^2 = 0;$ (f) $f(x,y) = (x+y)^2,\ |x| + |y| = 1;$

(g*) $f(x,y) = x^4 + y^4,\ x^2 + y^2 = 9;$ (h*) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ 5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9.$

Definicja 8.19. *(wartość najmniejsza, wartość największa funkcji na zbiorze)*
Niech A będzie niepustym podzbiorem dziedziny funkcji f.

• Mówimy, że liczba m jest *wartością najmniejszą* funkcji f na zbiorze A, jeżeli istnieje punkt $(x_0, y_0) \in A$ taki, że $f(x_0, y_0) = m$ oraz $f(x,y) \geqslant m$ dla każdego $(x,y) \in A$. Piszemy wtedy $f_{min} = m$.

• Mówimy, że liczba M jest *wartością największą* funkcji f na zbiorze A, jeżeli istnieje punkt $(x_0, y_0) \in A$ taki, że $f(x_0, y_0) = M$ oraz $f(x,y) \leqslant M$ dla każdego $(x,y) \in A$. Piszemy wtedy $f_{max} = M$.

Uwaga. Wartości najmniejszą i największą funkcji na zbiorze nazywamy *ekstremami globalnymi*. Z twierdzenia Weierstrassa wynika, że funkcja dwóch zmiennych ciągła na zbiorze domkniętym i ograniczonym w $\mathbb{R}^2$ przyjmuje wartości ekstremalne.

Ćwiczenie 8.20. Uzasadnić, że podane funkcje osiągają minimum lub maksimum globalne na podanych zbiorach we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y) = 2x^4 + 5y^4,\ \mathbb{R}^2,\ (x_0, y_0) = (0,0);$

(b) $f(x,y) = \sin^2 x \cos y,\ \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right] \times \left[-\pi, \dfrac{\pi}{6}\right],\ (x_0, y_0) = \left(\dfrac{\pi}{3}, 0\right).$

Algorytm szukania ekstremów globalnych funkcji na obszarze domkniętym

Wartości najmniejszą i największą funkcji na ograniczonym obszarze domkniętym znajdujemy w następujący sposób:

1. na obszarze otwartym szukamy punktów, w których funkcja **może mieć** ekstrema lokalne,

2. na brzegu obszaru szukamy punktów, w których funkcja **może mieć** ekstrema warunkowe,

3. porównujemy wartości funkcji w otrzymanych punktach oraz na tej podstawie ustalamy wartości najmniejszą i największą funkcji na obszarze domkniętym.

Ćwiczenie 8.21. Znaleźć wartości największe i najmniejsze podanych funkcji na wskazanych ograniczonych obszarach domkniętych lub w ich dziedzinach naturalnych:

(a) $f(x,y)=x^2+2xy-4x+8y,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2$;

(b) $f(x,y)=x^2y,\ x^2+y^2\leqslant 1$;

(c) $f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y),\ 0\leqslant x\leqslant \pi/2,\ 0\leqslant y\leqslant \pi/2$;

(d) $f(x,y)=x^2-xy,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant \sqrt{x}$;

(e*) $f(x,y)=x^2+2x+y^2-6y,\ |x|+|y|\leqslant 4$;

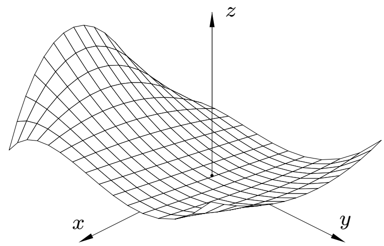
(f) $f(x,y)=\sqrt{9-(x^2+y^2)}+\sqrt{x^2+y^2-1}$;

(g) $f(x,y)=\sqrt{xy-2}+\sqrt{16-(x^2+y^2)}$.

Ćwiczenie* 8.22. Pokazać, że funkcja

$$f(x,y)=y^2+x^2(1+y)^3$$

ma tylko jeden punkt stacjonarny, w którym ma minimum lokalne właściwe, ale nie przyjmuje tam wartości najmniejszej na $\mathbb{R}^2$. Czy analogiczny fakt zachodzi dla funkcji jednej zmiennej?



Ćwiczenie 8.23.

(a) Obliczyć odległość początku układu współrzędnych od płaszczyzny $\pi:\ x-2y+3z-6=0$.

(b) Obliczyć odległość prostych skośnych

$$l:\begin{cases} x=-1+t,\\ y=-2+2t,\\ z=2t\ (t\in\mathbb{R}),\end{cases}\qquad k:\begin{cases} x=s,\\ y=-1+2s,\\ z=1-2s\ (s\in\mathbb{R}).\end{cases}$$

(c) Znaleźć wymiary a,b,c prostopadłościanu o objętości V, który ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej.

(d) W punktach $A_1=(0,0)$, $A_2=(1,0)$, $A_3=(2,3)$ płaszczyzny xOy umieszczone są masy $m_1=1$, $m_2=2$, $m_3=3$. Znaleźć oś prostopadłą do płaszczyzny xOy, względem której moment bezwładności podanego układu mas będzie najmniejszy.

(e*) Przekrój poprzeczny kanału ma mieć kształt trapezu równoramiennego o polu $S=100\,\mathrm{m}^2$. Brzegi i dno kanału wykłada się płytami. Znaleźć wymiary kanału, którego koszt budowy będzie najmniejszy.

(f*) Na powierzchni o równaniu $z=2x^2+3y^2$ znaleźć miejsce położone najbliżej punktu $P_0=(90,67,0)$.

9. Metoda najmniejszych kwadratów

Przypuśćmy, że wielkość y zależy w pewien nieznany sposób od zmiennej x. Niech zależność ta ma postać $y = f(a, b, x)$, gdzie f jest funkcją zmiennej x zawierającą dwa nieznane parametry a i b (najczęściej jest to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$). Dysponujemy wynikami n pomiarów wielkości x i y :

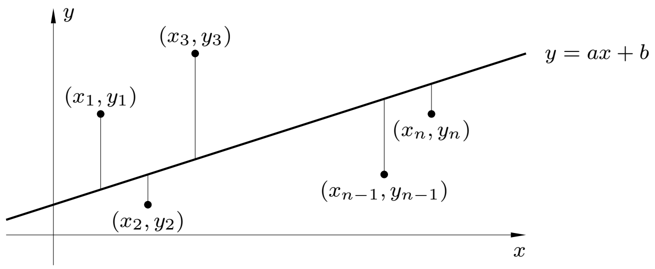
$$(x_1, y_2), (x_1, y_2), \ldots, (x_n, y_n),$$

przy czym wielkości y_i odpowiada wielkość x_i dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Szukamy parametrów a i b funkcji, która „*najlepiej*" przybliża otrzymane wyniki pomiarów, tj. szukamy minimum funkcji G określonej wzorem:

$$G(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[f(a,b,x_i) - y_i\right]^2, \quad \text{gdzie } a, b \in \mathbb{R}.$$

Dla funkcji liniowej wzór ten przyjmuje postać:

$$G(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[(ax_i + b) - y_i\right]^2, \quad \text{gdzie } a, b \in \mathbb{R}.$$



Rys. 9.1. Ilustracja metody najmniejszych kwadratów

Ćwiczenie 9.1. Stosując metodę *najmniejszych kwadratów* znaleźć nieznane parametry funkcji, które najlepiej aproksymują podane wyniki pomiarów:

(a) $f(x) = ax + b$, wyniki pomiarów: $(0,1), (1,2), (2,3), (3,5)$;

(b) $f(x) = ax^2 + b\sqrt{x}$, wyniki pomiarów: $(0,2), (1,3), (4,6)$.

10. Metoda mnożników Lagrange'a*

Ekstrema funkcji $f(x, y)$ przy warunku $g(x, y) = 0$.

TWIERDZENIE 10.1. *(warunek konieczny istnienia ekstremum warunkowego)*

Niech funkcje f, g mają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na otoczeniu punktu (x_0, y_0). Jeżeli funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalne przy warunku $g(x, y) = 0$, to istnieje liczba λ_0 taka, że

$$[\mathbf{1}] \quad L'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0, \quad L'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0, \quad g(x_0, y_0) = 0,$$

gdzie funkcja $L(x, y, \lambda)$ jest określona wzorem

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Uwaga. L nazywamy funkcją, a λ – *mnożnikiem Lagrange'a.* Punkt (x_0, y_0, λ_0) jest punktem stacjonarnym funkcji Lagrange'a. Jeśli z uwarunkowań geometrycznych, fizycznych, technicznych czy ekonomicznych problemu optymalizacyjnego wynika, że ma on rozwiązanie, to punkty znalezione z warunku koniecznego są optymalnym rozwiązaniem. Tak będzie np., gdy zbiór $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : g\,(x, y) = 0\right\}$ jest domknięty i ograniczony.

TWIERDZENIE 10.2. *(metoda mnożników Lagrange'a – warunek wystarczający)* Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego, a funkcja g ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na otoczeniu punktu (x_0, y_0) oraz niech funkcje te spełniają warunki [**1**]. Wówczas, jeżeli

$$\widetilde{H}\,(x_0, y_0, \lambda_0) = \det \begin{bmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L'''_{xy} \\ g'_y & L'_{xy} & L''_{yy} \end{bmatrix} (x_0, y_0, \lambda_0) \neq 0,$$

to funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalne właściwe przy warunku $g(x, y) = 0$ i jest to minimum, gdy $\widetilde{H}\,(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ albo maksimum, gdy $\widetilde{H}\,(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$.

Uwaga. Funkcję $\widetilde{H}$ określoną w twierdzeniu nazywamy *hessianem obrzeżonym.*

Ćwiczenie 10.3. Korzystając z metody mnożników Lagrange'a znaleźć:
(a) ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = x - y$ przy warunku $x^2 + y^2 = 2$;
(b) ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2$ przy warunku $4x^2 + y^2 = 25$;
(c) punkt na prostej $l : 4x - 3y + 16 = 0$ położony najbliżej punktu $P = (1, 3)$.

Ekstrema funkcji $f(x, y, z)$ przy warunku $g(x, y, z) = 0$.

TWIERDZENIE 10.4. *(warunek konieczny istnienia ekstremum warunkowego)* Niech funkcje f, g mają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na otoczeniu punktu (x_0, y_0, z_0). Jeżeli funkcja $f(x, y, z)$ ma w punkcie (x_0, y_0, z_0) ekstremum lokalne przy warunku $g(x, y, z) = 0$, to istnieje liczba λ_0 taka, że

$$[\mathbf{2}] \quad \begin{cases} L'_x\,(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = 0, \quad L'_y\,(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = 0, \quad L'_z\,(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = 0, \\ g\,(x_0, y_0, z_0) = 0, \end{cases}$$

gdzie funkcja $L(x, y, z, \lambda)$ jest określona wzorem

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z).$$

Uwaga. Analogicznie jak poprzednio, L nazywamy funkcją, a λ – mnożnikiem Lagrange'a. Punkt $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ jest punktem stacjonarnym funkcji Lagrange'a.

TWIERDZENIE 10.5. *(metoda mnożników Lagrange'a – warunek wystarczający)*
Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego, a funkcja g ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na otoczeniu punktu (x_0, y_0, z_0) oraz niech funkcje te spełniają warunki [**2**]. Wówczas, jeżeli

$$\widetilde{H}\left(x_0, y_0, z_0, \lambda_0\right) = \det \begin{bmatrix} 0 & g'_x & g'_y & g'_z \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz} \\ g'_y & L''_{xy} & L''_{yy} & L''_{yz} \\ g'_z & L''_{xz} & L''_{yz} & L''_{zz} \end{bmatrix} (x_0, y_0, z_0, \lambda_0) < 0,$$

to funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0, z_0) ekstremum lokalne właściwe przy warunku $g(x, y, z) = 0$ i jest to minimum, gdy

$$\det \begin{bmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{bmatrix} (x_0, y_0, z_0, \lambda_0) < 0$$

albo maksimum, gdy

$$\det \begin{bmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{bmatrix} (x_0, y_0, z_0, \lambda_0) > 0.$$

Ćwiczenie 10.6. Korzystając z metody mnożników Lagrange'a znaleźć:
(a) ekstrema lokalne funkcji $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ przy warunku $2x - 2y + z = 10$;
(b) ekstrema lokalne funkcji $f(x, y, z) = xyz$ przy warunku $x + 2y + 2z = 6$;
(c) punkt na powierzchni $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 4z = 0$ położony najbliżej punktu $P = (3, 6, -6)$.

Ekstrema funkcji $f(x, y, z)$ przy warunkach $g(x, y, z) = 0$, $h(x, y, z) = 0$

TWIERDZENIE 10.7. *(warunki konieczne istnienia ekstremum warunkowego)*
Niech funkcje f, g, h mają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na otoczeniu punktu (x_0, y_0, z_0). Jeżeli funkcja $f(x, y, z)$ ma w punkcie (x_0, y_0, z_0) ekstremum lokalne przy warunkach $g(x, y, z) = 0$, $h(x, y, z) = 0$, to istnieją liczby λ_0, μ_0 takie, że

$$[\mathbf{3}] \quad \begin{cases} L'_x\left(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0\right) = 0,\ L'_y\left(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0\right) = 0,\ L'_z\left(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0\right) = 0, \\ g\left(x_0, y_0, z_0\right),\ h\left(x_0, y_0, z_0\right) = 0, \end{cases}$$

gdzie funkcja $L(x, y, z, \lambda, \mu)$ jest określona wzorem

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z).$$

Uwaga. Podobnie L nazywamy funkcją, a λ, μ – mnożnikami Lagrange'a. Punkt $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$ jest punktem stacjonarnym funkcji Lagrange'a.

TWIERDZENIE 10.8. *(metoda mnożników Lagrange'a – warunek wystarczający)*
Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego, a funkcje g, h ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na otoczeniu punktu (x_0, y_0, z_0) oraz niech funkcje te spełniają warunki [**3**]. Wówczas, jeżeli

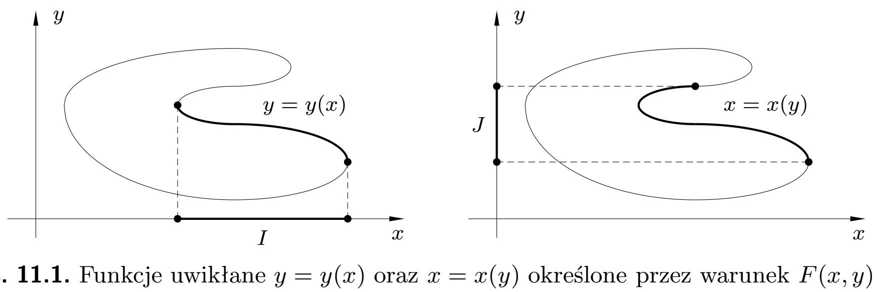
$$\widetilde{H}\,(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0) = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & g'_x & g'_y & g'_z \\ 0 & 0 & h'_x & h'_y & h'_z \\ g'_x & h'_x & L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz} \\ g'_y & h'_y & L''_{xy} & L''_{yy} & L''_{yz} \\ g'_z & h'_z & L''_{xz} & L''_{xy} & L''_{zz} \end{bmatrix} (x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0) \neq 0,$$

to funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0, z_0) ekstremum lokalne właściwe przy warunkach $g(x, y, z) = 0$, $h(x, y, z) = 0$ i jest to minimum, gdy $\widetilde{H}\,(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0) > 0$ albo maksimum, gdy $\widetilde{H}\,(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0) < 0$.

Ćwiczenie 10.9. Korzystając z metody mnożników Lagrange'a znaleźć:
(a) ekstrema lokalne funkcji $f(x, y, z) = xyz$ przy warunkach $xy + yz + zx = 8$, $x + y + z = 5$;
(b) ekstrema lokalne funkcji $f(x, y, z) = z$ przy warunkach $x^2 + y^2 = 5$, $2x + y + z = 6$;
(c) punkt na prostej $l:\ x - y = 0,\ x + z = 0$ położony najbliżej punktu $P = (1, -1, 3)$.

11. Funkcje uwikłane

Definicja 11.1. *(funkcje uwikłane)*
Funkcją uwikłaną określoną przez warunek $F(x, y) = 0$ nazywamy każdą funkcję $y = y(x)$ spełniającą równość $F(x, y(x)) = 0$ dla wszystkich x z pewnego przedziału I. Podobnie określa się funkcję uwikłaną postaci $x = x(y)$, gdzie $y \in J$.



Rys. 11.1. Funkcje uwikłane $y = y(x)$ oraz $x = x(y)$ określone przez warunek $F(x, y) = 0$

Ćwiczenie 11.2. Naszkicować wykresy wszystkich uwikłanych funkcji ciągłych (różniczkowalnych) postaci $y = y(x)$ (o maksymalnych dziedzinach), które są określone przez warunki:

(a) $x^2 + y^2 = 4$; (b) $x^3 - y^3 = 0$; (c) $\sin x = \cos y$; (d) $x^2 - y^2 = 0$;

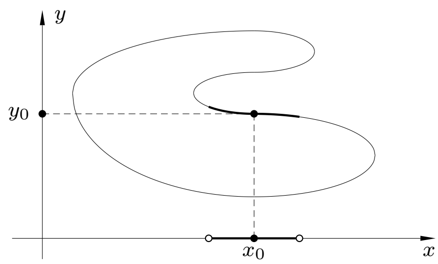
(e) $x^7 + 3x^5 + x = y^7 + 3y^5 + y$; (f*) $x^y = y^x$;

(g*) $x^x = y^y$; (h*) $\left(x^2 + y^2\right)^4 = \left(x^2 - y^2\right)^2$.

TWIERDZENIE 11.3. *(o istnieniu i różniczkowalności funkcji uwikłanej)* Niech funkcja F ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na otoczeniu punktu (x_0, y_0) oraz niech spełnia warunki: $F(x_0, y_0) = 0$ i $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Wtedy na pewnym otoczeniu O punktu x_0 istnieje jednoznacznie określona funkcja uwikłana $y = y(x)$ spełniająca warunki: $y(x_0) = y_0$ oraz $y'(x) = -F'_x(x, y(x)) / F'_y(x, y(x))$ dla każdego $x \in O$.

Uwaga. Jeżeli ponadto funkcja F ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu na otoczeniu punktu (x_0, y_0), to funkcja uwikłana $y = y(x)$ jest dwukrotnie różniczkowalna na pewnym otoczeniu punktu x_0 i jej pochodna wyraża się wzorem

$$y'' = -\frac{F''_{xx}\left(F'_y\right)^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}\left(F'_x\right)^2}{\left(F'_y\right)^3}.$$



Rys. 11.2. Ilustracja twierdzenia o istnieniu i różniczkowalności funkcji uwikłanej

Ćwiczenie 11.4. Zbadać, czy podane równania określają jednoznacznie ciągłą funkcję uwikłaną postaci $y = y(x)$ lub $x = x(y)$ na pewnych otoczeniach wskazanych punktów:

(a) $x = \cos y,\ A = (1, 0),\ B = \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$;

(b) $x^2 - 2^y - 1 = 0,\ A = (\sqrt{3}, 1),\ B = (3, 3)$;

(c) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 1,\ A = (3, 2),\ B = (0, -1)$.

Ćwiczenie 11.5. Obliczyć $y'(x_0)$, $y''(x_0)$ funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej w otoczeniu wskazanego punktu (x_0, y_0) przez równania:

(a) $x^2y + xy^2 = 2,\ (x_0, y_0) = (1, 1)$; (b) $x + \sin y = xy,\ (x_0, y_0) = (0, 0)$;

(c) $2\sqrt{y} = x - y,\ (x_0, y_0) = \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right)$; (d) $e^x + e^y = xy + 2,\ (x_0, y_0) = (0, 0)$.

Ćwiczenie 11.6. Obliczyć pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanych $y = y(x)$ określonych przez równania:

(a) $x^2 - y + y^2 + 1 = 0$; (b) $y - \sin y + x^2 = 0$;

(c) $y^2 - \operatorname{arc\,tg} y - e^x = 0$; (d) $x = y + \ln y$.

Ćwiczenie 11.7. Napisać równania stycznych do krzywych określonych podanymi równaniami we wskazanych punktach tych krzywych:

(a) $(x - y)^2 = xy + x - y + 3,\ A = (1, -1)$; (b) $x + x^3 = y^3 + y^5,\ A = (1, 1)$;

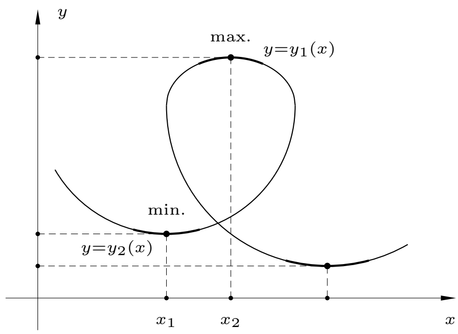
(c) $2 + x^3 + y^3 = e^x + e^y,\ A = (0, 0)$; (d) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} + xy = 1,\ A = (1, 0)$.

TWIERDZENIE 11.8. *(o ekstremach lokalnych funkcji uwikłanej)*
Niech funkcja F ma ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego na otoczeniu punktu (x_0, y_0) oraz niech spełnia warunki:

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_x(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0, \quad A = -\frac{F''_{xx}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} \neq 0.$$

Wtedy funkcja uwikłana $y = y(x)$ określona przez warunek $F(x, y) = 0$ ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne właściwe i jest to minimum, gdy $A > 0$ albo maksimum, gdy $A < 0$.

Uwaga. Równość $F'_x(x_0, y_0) = 0$ jest warunkiem koniecznym, zaś $F''_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$ warunkiem wystarczającym istnienia ekstremum funkcji uwikłanej. Prawdziwe jest także analogiczne twierdzenie o ekstremach funkcji uwikłanej postaci $x = x(y)$.



Rys. 11.3. Funkcja uwikłana $y = y_1(x)$ ma w punkcie x_1 maksimum lokalne, a funkcja $y = y_2(x)$ ma w punkcie x_2 minimum lokalne właściwe

Algorytm znajdowania ekstremów lokalnych funkcji uwikłanej

1. Punkty, w których funkcja uwikłana może mieć ekstrema lokalne, znajdujemy korzystając z warunku koniecznego istnienia ekstremum. W tym celu rozwiązujemy układ warunków:

$$F(x,y)=0, \qquad F'_x(x,y)=0, \qquad F'_y(x,y)\neq 0.$$

2. W otrzymanych punktach (x_0,y_0) sprawdzamy warunek wystarczający istnienia ekstremum, tj. badamy, czy zachodzi nierówność

$$A=-\frac{F''_{xx}(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}\neq 0.$$

Na podstawie znaku A ustalamy rodzaj ekstremum.

Ćwiczenie 11.9. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanych postaci $y=y(x)$ określonych przez warunki:

(a) $x^3+y^3-8xy=0$; (b) $x^2+y^2-xy-2x+4y=0$;

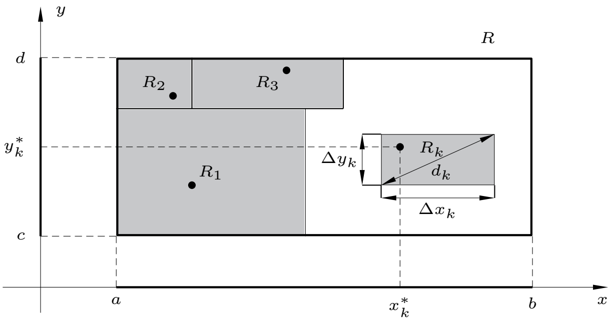
(c) $\left(x^2+y^2\right)^2=2\left(x^2-y^2\right)$; (d) $y^2-y^4=x^2$.

4. Całki podwójne

1. Całki podwójne po prostokącie

Definicja 1.1. *(podział prostokąta)*

Podziałem prostokąta $R = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ nazywamy rodzinę $\mathcal{P}$ złożoną z prostokątów $R_1, R_2, \ldots, R_n$, które całkowicie wypełniają prostokąt R i mają parami rozłączne wnętrza.



Rys. 1.1. Podział prostokąta

Oznaczenia stosowane w definicji całki po prostokącie:

Δx_k, Δy_k – wymiary prostokąta R_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$;

$d_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$ – długość przekątnej prostokąta R_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$;

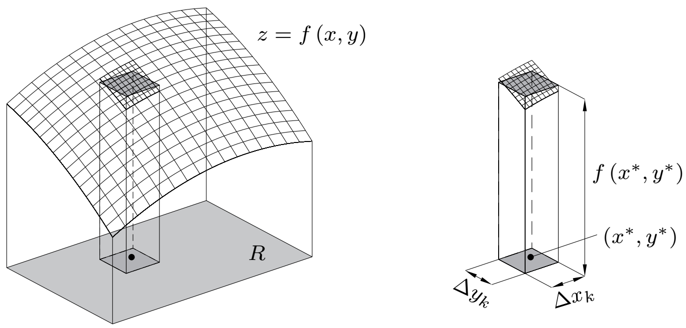
$\delta(\mathcal{P}) = \max\{d_k :\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$ – *średnica podziału* $\mathcal{P}$,

$\Xi = \{(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*), \ldots, (x_n^*, y_n^*)\}$, gdzie $(x_k^*, y_k^*) \in R_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ – *zbiór punktów pośrednich* podziału $\mathcal{P}$.

Definicja 1.2. *(suma całkowa)*

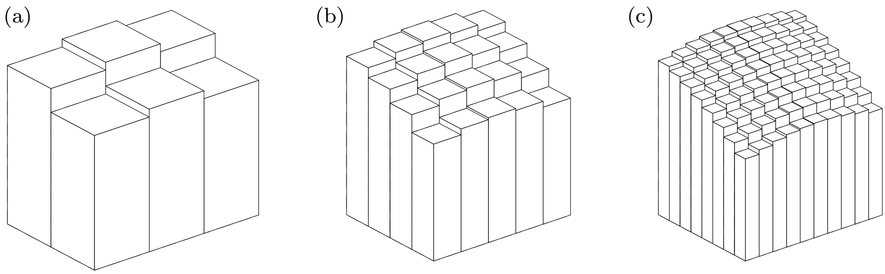
Niech funkcja f będzie ograniczona na prostokącie R oraz niech $\mathcal{P}$ będzie podziałem tego prostokąta, a Ξ zbiorem punktów pośrednich. *Sumą całkową* funkcji f odpowiadającą podziałowi $\mathcal{P}$ oraz punktom pośrednim Ξ nazywamy liczbę

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)(\Delta x_k)(\Delta y_k).$$



Rys. 1.2. Ilustracja sumy całkowej

Uwaga. Suma całkowa jest przybliżeniem objętości bryły ograniczonej wykresem funkcji $z = f(x, y) \geqslant 0$, leżącym nad prostokątem R oraz płaszczyzną xOy przez sumę objętości prostopadłościanów o podstawach R_k i wysokościach $f(x_k^*, y_k^*)$.



Rys. 1.2. Ilustracja sumy całkowej dla: (a) $n = 6$, (b) $n = 24$, (c) $n = 80$

Definicja 1.3. *(całka podwójna po prostokącie)*

Niech funkcja f będzie ograniczona na prostokącie R. *Całkę podwójną* z funkcji f po prostokącie R definiujemy wzorem:

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dxdy = \lim_{\delta(\mathcal{P}) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)(\Delta x_k)(\Delta y_k).$$

Zakładamy przy tym, że granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa i nie zależy od sposobów podziału $\mathcal{P}$ prostokąta R ani od sposobów wyboru punktów pośrednich Ξ. Mówimy wtedy, że funkcja f jest *całkowalna na prostokącie* R.

Uwaga. Całkę podwójną z funkcji f po prostokącie R oznaczamy też symbolem

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dP.$$

Całka podwójna po prostokącie jest uogólnieniem całki z funkcji jednej zmiennej.

FAKT 1.4. *(o całkowalności funkcji ciągłej)*

Funkcja ciągła na prostokącie jest na nim całkowalna.

TWIERDZENIE 1.5. *(o liniowości całki)*
Niech funkcje f i g będą całkowalne na prostokącie R oraz niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\iint\limits_R \Big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\Big)\, dP = \alpha \iint\limits_R f(x,y)\, dP + \beta \iint\limits_R g(x,y)\, dP.$$

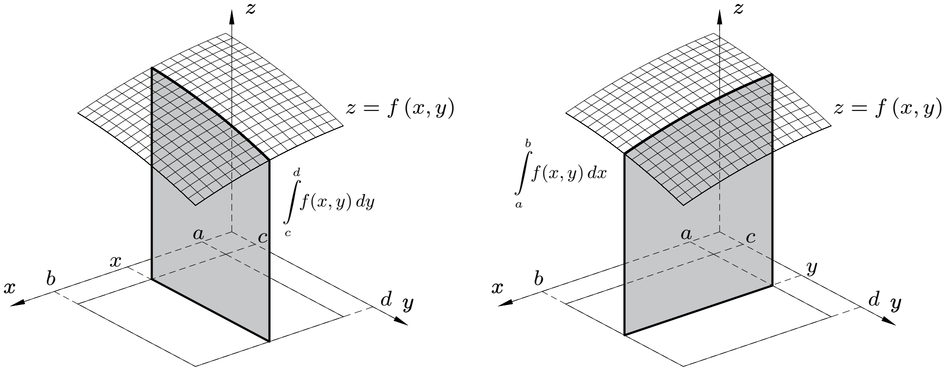
TWIERDZENIE 1.6. *(o addytywności całki względem obszaru całkowania)*
Jeżeli funkcja f jest całkowalna na prostokącie R, to dla dowolnego podziału tego prostokąta na prostokąty R_1, R_2 o rozłącznych wnętrzach zachodzi równość

$$\iint\limits_R f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\, dP + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\, dP.$$

TWIERDZENIE 1.7. *(o zamianie całki podwójnej na całki iterowane)*
Jeżeli funkcja f jest ciągła na prostokącie $[a,b] \times [c,d]$, to

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dP = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)\, dy\right] dx = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)\, dx\right] dy.$$

Uwaga. Całki występujące w tezie twierdzenia nazywamy *całkami iterowanymi*.



Rys. 1.3. Ilustracja całek iterowanych

Będziemy pisali umownie

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\, dy \quad \text{i} \quad \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\, dx,$$

zamiast odpowiednio

$$\int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)\ dy\right] dx \quad \text{i} \quad \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)\ dx\right] dy.$$

Ćwiczenie 1.8. Obliczyć całki iterowane:

(a) $\displaystyle\int_1^2 dx \int_0^3 \left(x+y^2x\right)\, dy, \qquad \int_0^3 dy \int_1^2 \left(x+y^2x\right)\, dx;$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 dx \int_2^4 \left(x^2+y^2x\right)\, dy, \qquad \int_2^4 dy \int_{-1}^1 \left(x^2+y^2x\right)\, dx;$

(c) $\displaystyle\int_0^{\ln 4} dx \int_0^{\ln 3} e^{x+y}\, dy, \qquad \int_0^{\ln 3} dy \int_0^{\ln 4} e^{x+y}\, dx.$

Ćwiczenie 1.9. Obliczyć całki podwójne po wskazanych prostokątach:

(a) $\displaystyle\iint_R xy^2\, dxdy,\ R=[0,1]\times[-1,1];$ (b) $\displaystyle\iint_R \sin(x+y)\, dxdy,\ R=\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{4}\right];$

(c) $\displaystyle\iint_R xe^{x-y}\, dxdy,\ R=[0,1]\times[0,3];$ (d) $\displaystyle\iint_R \frac{xy\, dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+1}},\ R=[0,1]\times[0,1].$

FAKT 1.10. *(całka podwójna z funkcji o rozdzielonych zmiennych)*
Niech funkcje g i h będą ciągłe odpowiednio na przedziałach $[a,b]$ i $[c,d]$. Wtedy

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} g(x)h(y)\, dxdy = \left(\int_a^b g(x)\, dx\right)\cdot\left(\int_c^d h(y)\, dy\right).$$

Ćwiczenie 1.11. Podane całki zamienić na sumy i iloczyny całek pojedynczych:

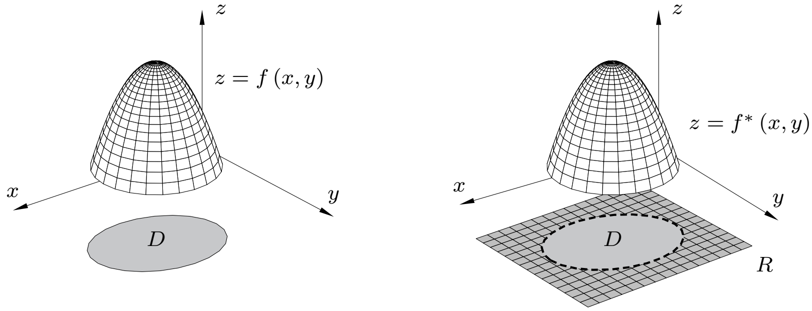
(a) $\displaystyle\iint_R \cos(x+y)\, dxdy,\ R=\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{4}\right];$ (b) $\displaystyle\iint_R e^{x+y}\, dxdy,\ R=[0,1]\times[0,1];$

(c) $\displaystyle\iint_R xy(x+y)\, dxdy,\ R=[-1,1]\times[-1,1];$ (d) $\displaystyle\iint_R \ln\left(y^x\right)\, dxdy,\ R=[2,4]\times[1,e].$

2. Całki podwójne po obszarach normalnych

Definicja 2.1. *(całka podwójna po obszarze)*
Niech f będzie funkcją określoną i ograniczoną na obszarze ograniczonym $D\subset\mathbb{R}^2$ oraz niech R będzie dowolnym prostokątem zawierającym obszar D (rysunek). Ponadto niech funkcja f^* będzie rozszerzeniem funkcji f na R określonym wzorem:

$$f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & \text{dla} \quad (x,y)\in D,\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)\in R\setminus D.\end{cases}$$



Rys. 2.1. Ilustracja rozszerzenia funkcji na prostokąt

Całkę podwójną funkcji f po obszarze D definiujemy wzorem:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dP = \iint\limits_{R} f^*(x,y)\,dP,$$

o ile całka po prawej stronie znaku równości istnieje. Mówimy wtedy, że funkcja f jest *całkowalna na obszarze* D.

Uwaga. Całka $\displaystyle\iint\limits_{R} f^*(x,y)\,dP$ nie zależy od wyboru prostokąta R.

Definicja 2.2. *(obszary normalne względem osi układu)*

Obszar domknięty D nazywamy *obszarem normalnym względem osi* Ox, jeżeli można go zapisać w postaci:

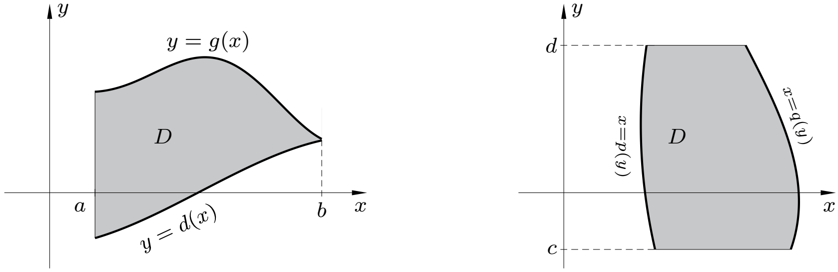
$$D = \{(x,y):\ a \leqslant x \leqslant b,\ g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\},$$

gdzie funkcje g i h są ciągłe na $[a,b]$ oraz $g(x) < h(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$.

Podobnie, obszar domknięty D nazywamy *obszarem normalnym względem osi* Oy, jeżeli można go zapisać w postaci:

$$D = \{(x,y):\ c \leqslant y \leqslant d,\ p(y) \leqslant x \leqslant q(y)\},$$

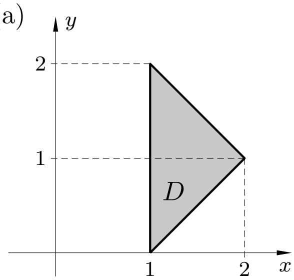
gdzie funkcje p i q są ciągłe na $[c,d]$ oraz $p(y) < q(y)$ dla każdego $y \in (c,d)$.



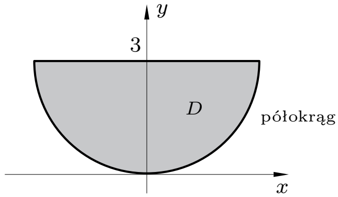
Rys. 2.2. Obszar normalny względem osi: (a) Ox, (b) Oy

Ćwiczenie 2.3. Obszary przedstawione poniżej zapisać jako normalne względem osi Ox lub Oy:

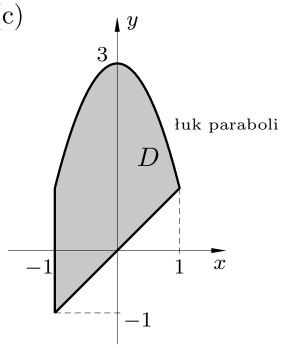
(a)



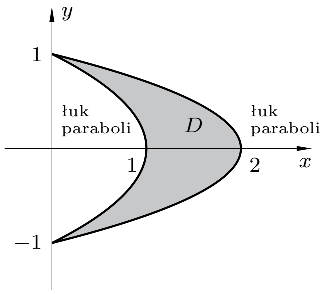
(b)



(c)



(d)



Ćwiczenie 2.4. Zbadać, który z obszarów ograniczonych podanymi krzywymi jest normalny względem osi Ox, a który względem osi Oy. Naszkicować te obszary.

(a) $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$;

(b) $y = 0,\ x = 2,\ y = x^2$;

(c) $y = \dfrac{1}{x},\ y = x,\ y = 2x\ (x > 0)$;

(d) $x^2 + y^2 = 1$;

(e) $y = -1,\ y = 1,\ x = 2 - \sqrt{1 - y^2},\ x = \sqrt{1 - y^2} - 1$;

(f) $y = |\sin x|,\ y = -1,\ x = -\dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{\pi}{2}$.

TWIERDZENIE 2.5. *(całki podwójne po obszarach normalnych)*

(**a**) Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze

$$D = \{(x, y) :\ a \leqslant x \leqslant b,\ g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\}$$

normalnym względem osi Ox, to

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\ dy \right) dx.$$

(**b**) Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze

$$D = \{(x, y) :\ c \leqslant y \leqslant d,\ p(y) \leqslant x \leqslant q(y)\}$$

normalnym względem osi Oy, to

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\ dx \right) dy.$$

Uwaga. Całki iterowane:

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx, \quad \int\limits_c^d \left(\int\limits_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

będziemy zapisywali umownie odpowiednio w postaci:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy, \quad \int\limits_c^d dy \int\limits_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx.$$

Ćwiczenie 2.6. Zamienić całkę podwójną $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ na całki iterowane, jeżeli obszar D ograniczony jest krzywymi:

(a) $y = 1 + \sqrt{2x - x^2},\ x = 0,\ x = 2,\ y = 0;$

(b) $y = x,\ xy = 1,\ y = \dfrac{1}{2};$

(c) $yx^2 = 1,\ y = 1,\ y = 2;$

(d) $y = |x-1|,\ y = 2 - |x-1|;$

(e) $x = 0,\ x^2 + y^2 = 1,\ y = \sqrt{x},\ (y \geqslant 0);$

(f) $x = y^2,\ y = x - 2.$

Ćwiczenie 2.7. Obliczyć całki iterowane (narysować obszary całkowania):

(a) $\displaystyle\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} \frac{dy}{(1+x+y)^2};$

(b) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{x} \cos(x+y)\,dy;$

(c) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{2y}^{y} (y-x)e^y\,dx;$

(d) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2} dy \int\limits_{y^2}^{y+2} y^2\,dx;$

(e) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} xy\,dy;$

(f) $\displaystyle\int\limits_1^{e} dx \int\limits_0^{\frac{1}{x}} e^{xy}\,dy;$

(g*) $\displaystyle\int\limits_0^{1} dy \int\limits_y^{1} ye^{x^3}\,dx;$

(h*) $\displaystyle\int\limits_0^{1} dy \int\limits_y^{1} \frac{dx}{1+x^4};$

(i*) $\displaystyle\int\limits_0^{1} dy \int\limits_y^{1} \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}\,dx.$

Wsk. W niektórych całkach należy zmienić kolejność całkowania.

Ćwiczenie 2.8. Narysować obszary całkowania i następnie dokonać zmiany kolejności całkowania w przykładach:

(a) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^1 f(x,y)\,dy$; (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)\,dy$; (c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} dy \int_{y^2}^{4} f(x,y)\,dx$;

(d) $\displaystyle\int_1^{e^2} dy \int_0^{\ln y} f(x,y)\,dx$; (e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dx$; (f) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{2^{-x}}^{4^x} f(x,y)\,dx.$

Ćwiczenie 2.9. Obliczyć całki podwójne:

(a) $\displaystyle\iint_D \left(x^2 - xy\right)\,dxdy, \quad D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ y \geqslant x,\ y \leqslant 3x - x^2\right\};$

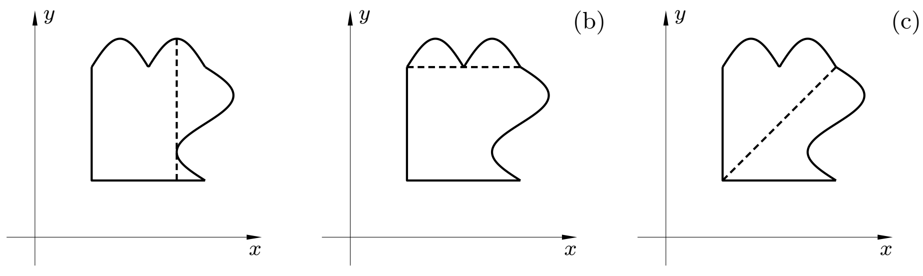
(b) $\displaystyle\iint_D (3x - 2y)\,dxdy, \quad D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leqslant 1\right\};$

(c) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy, \quad D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ y \leqslant 6 - x,\ y \geqslant \sqrt{x}, x \geqslant 0\right\};$

(d) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy, \quad D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x \leqslant \arcsin y,\ y \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}},\ x \geqslant 0\right\}.$

Definicja 2.10. *(obszar regularny na płaszczyźnie)*

Sumę skończonej liczby obszarów normalnych (względem osi Ox lub Oy) o parami rozłącznych wnętrzach nazywamy *obszarem regularnym* na płaszczyźnie.



Rys. 2.3. Przykłady podziałów obszarów regularnych na obszary normalne: (a) względem osi Ox, (b) względem osi Oy, (c) względem obu osi

FAKT 2.11. *(całka po obszarze regularnym na płaszczyźnie)*

Niech obszar regularny D będzie sumą obszarów normalnych $D_1, D_2, \ldots, D_n$ o parami rozłącznych wnętrzach oraz niech funkcja f będzie całkowalna na tym obszarze. Wtedy

$$\iint_D f(x,y)\,dP = \iint_{D_1} f(x,y)\,dP + \iint_{D_2} f(x,y)\,dP + \ldots + \iint_{D_n} f(x,y)\,dP.$$

Uwaga. Całki po obszarach regularnych mają te same własności, co całki po prostokątach (liniowość, addytywność względem obszaru całkowania).

Ćwiczenie 2.12. Obliczyć podane całki podwójne po zbiorach ograniczonych wskazanymi krzywymi:

(a) $\displaystyle\iint\limits_D xy\,dxdy, \quad D:\ xy=1,\ |x-y|=1;$

(b) $\displaystyle\iint\limits_D (x+y)\,dxdy, \quad D:\ y=\sqrt{|x|},\ 2y=|x|,\ |x|=1;$

(c) $\displaystyle\iint\limits_D y\,dxdy, \quad D:\ y=2-x^2,\ y=-1,\ y=1,\ x=1-\sqrt{1-y^2}.$

Definicja 2.13. *(całka podwójna z funkcji wektorowej)*
Niech funkcje $F_1,\ F_2$ będą całkowalne na obszarze regularnym $D\subset\mathbb{R}^2$. Całkę z funkcji wektorowej $\boldsymbol{F}=(F_1,F_2)$ po obszarze D określamy wzorem:

$$\iint\limits_D \boldsymbol{F}(x,y)\,dP=\left(\iint\limits_D F_1(x,y)\,dP,\iint\limits_D F_2(x,y)\,dP\right).$$

Uwaga. Podobnie określa się całkę po obszarze D z funkcji wektorowej postaci:

$$\boldsymbol{F}(x,y)=\Big(F_1(x,y),F_2(x,y),F_3\,(x,y)\Big).$$

FAKT 2.14. *(o całkowaniu funkcji nieciągłych)*
Jeżeli funkcja f jest całkowalna na obszarze regularnym D, a funkcja ograniczona g pokrywa się z funkcją f poza skończoną liczbą krzywych, które są wykresami funkcji ciągłych postaci $y=y(x)$ lub $x=x(y)$, to funkcja g jest całkowalna na D oraz

$$\iint\limits_D g(x,y)\,dP=\iint\limits_D f(x,y)\,dP.$$

Uwaga. Inaczej mówiąc zmiana wartości funkcji f w punktach krzywych ciągłych postaci $y=y(x)$ lub $x=x(y)$ nie powoduje zmiany wartości całki z tej funkcji.

Ćwiczenie 2.15. Korzystając z powyższego twierdzenia obliczyć całki podwójne:

(a) $\displaystyle\iint\limits_D \Big\lfloor \sin(x+y)\Big\rfloor\ dxdy,\ D=[0,\pi]\times[0,\pi];$

(b) $\displaystyle\iint\limits_D \operatorname{sgn}\left(y-x^2\right)\ dxdy,\ D=[0,2]\times[0,2];$

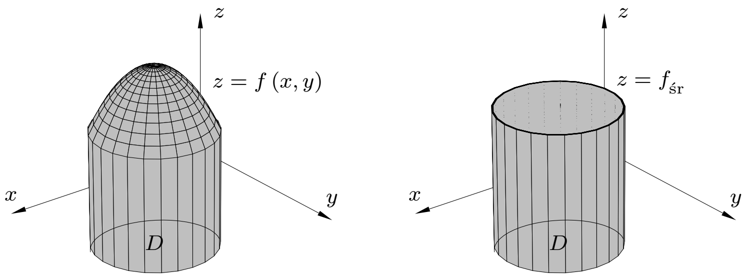
(c) $\iint\limits_D \min(x, x+y)\, dxdy,\ D = [1,2] \times [-1,3]$;

(d) $\iint\limits_D \left|\sqrt{x} - y\right|\, dxdy,\ D = [0,4] \times [0,2]$.

Definicja 2.16. *(wartość średnia funkcji na obszarze)*
Wartością średnią funkcji f na obszarze D nazywamy liczbę $f_{\text{śr}}$ określoną wzorem

$$f_{\text{śr}} = \frac{1}{\text{pole}\,(D)} \iint\limits_D f(x,y)\, dP.$$

Uwaga. Jeżeli $f \geqslant 0$, to wartość średnia funkcji f na obszarze D jest wysokością walca o podstawie D, którego objętość jest równa objętości bryły ograniczonej wykresem funkcji f leżącym nad D.



Rys. 2.4. Wartość średnia funkcji

Ćwiczenie 2.17. Obliczyć wartości średnie podanych funkcji na wskazanych obszarach:
(a) $f(x,y) = x, \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}\right\}$;

(b) $f(x,y) = \sin(x+y), \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x, y \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$.

Ćwiczenie 2.18. Wysokość nad poziomem morza pewnego terenu jest opisana wzorem $w(x,y) = 20 + \sin x \cos 2y$, gdzie $(x,y) \in [0,\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$. Obliczyć średnie wzniesienie tego terenu.

3. Zamiana zmiennych w całkach podwójnych*

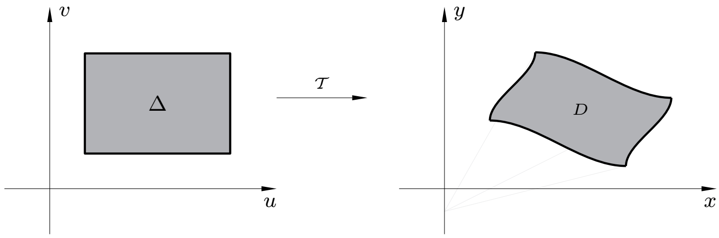
Definicja 3.1. *(przekształcenie obszarów na płaszczyźnie)*
Niech Δ i D będą obszarami odpowiednio na płaszczyznach uOv i xOy. Przekształceniem obszaru Δ w obszar D nazywamy funkcję $\mathcal{T} : \Delta \longrightarrow D$ określoną wzorem:

$$(x,y) = \mathcal{T}(u,v) = \Big(\varphi(u,v), \psi(u,v)\Big), \qquad \text{gdzie } (u,v) \in \Delta.$$

Obrazem zbioru Δ przy przekształceniu $\mathcal{T}$ nazywamy zbiór

$$\mathcal{T}(\Delta) = \Big\{(x,y) : x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ (u,v) \in \Delta\Big\}.$$

Przekształcenie $\mathcal{T}$ nazywamy:
a) ciągłym, jeżeli funkcje φ i ψ są ciągłe na obszarze Δ;
b) różnowartościowym, jeżeli różnym punktom obszaru Δ odpowiadają różne punkty jego obrazu D.



Rys. 3.1. Przekształcenie obszarów na płaszczyźnie

Ćwiczenie 3.2. Narysować obrazy podanych obszarów Δ przez wskazane przekształcenia $\mathcal{T}$ płaszczyzny uOv w płaszczyznę xOy:

(a) $\Delta = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant u \leqslant 1,\, 2 \leqslant v \leqslant 4\big\}$, $\mathcal{T} : \begin{cases} x = u + v, \\ y = u - v; \end{cases}$

(b) $\Delta = \Big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant u \leqslant 2,\, 0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}\Big\}$, $\mathcal{T} : \begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v; \end{cases}$

(c) $\Delta = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant u \leqslant 1,\, 0 \leqslant v \leqslant 1\big\}$, $\mathcal{T} : \begin{cases} x = uv, \\ y = u^2 - v^2; \end{cases}$

(d) $\Delta = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant u \leqslant 2,\, \pi \leqslant v \leqslant 2\pi\big\}$, $\mathcal{T} : \begin{cases} x = e^u\cos v, \\ y = e^u\sin v. \end{cases}$

Czy podane przekształcenia $\mathcal{T}$ są różnowartościowe na obszarze Δ?

FAKT 3.3. *(obraz obszaru przy przekształceniu)*

Obraz obszaru przy przekształceniu ciągłym i różnowartościowym jest również obszarem.

Definicja 3.4. *(jakobian przekształcenia)*

*Jakobianem** przekształcenia $\mathcal{T}(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ nazywamy funkcję określoną wzorem:

$$J_{\mathcal{T}}(u,v) = \det\begin{bmatrix} \varphi'_u(u,v) & \varphi'_v(u,v) \\ \psi'_u(u,v) & \psi'_v(u,v) \end{bmatrix}.$$

*Karol Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), matematyk niemiecki.

Uwaga. Jakobian przekształcenia $\mathcal{T}$ oznacza się także przez $\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}$ lub $\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}$. Wartość bezwzględna jakobianu przekształcenia w punkcie jest w przybliżeniu stosunkiem pola obrazu małego otoczenia punktu do pola tego otoczenia.

TWIERDZENIE 3.5. *(o zamianie zmiennych w całce podwójnej)*
Niech przekształcenie $\mathcal{T} = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ odwzorowuje różnowartościowo wnętrze obszaru regularnego Δ na wnętrze obszaru regularnego D, gdzie funkcje φ, ψ mają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na pewnym zbiorze otwartym zawierającym obszar Δ oraz ich jakobian $J_{\mathcal{T}}$ jest różny od zera wewnątrz tego obszaru. Niech ponadto funkcja f będzie ciągła na obszarze D. Wtedy

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_\Delta f\Big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\Big)\Big|J_{\mathcal{T}}(u,v)\Big|\,dudv.$$

Ćwiczenie 3.6. Dokonując odpowiedniej zamiany zmiennych obliczyć podane całki podwójne, gdzie D jest obszarem całkowania ograniczonym wskazanymi krzywymi:

(a) $\displaystyle\iint\limits_D (x+y)\,dxdy,\ \ D:\ 2x+y=2,\ 2x+y=3,\ x-y=-1,\ x-y=1;$

(b) $\displaystyle\iint\limits_D xy\,dxdy,\ \ D:\ xy=1,\ xy=2,\ y=x^2,\ y=3x^2;$

(c) $\displaystyle\iint\limits_D \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)dxdy,\ \ D:\ 9x^2+4y^2=36;$

(d*) $\displaystyle\iint\limits_D \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)dxdy,\ \ D:\ x=0,\ y=0,\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2.$

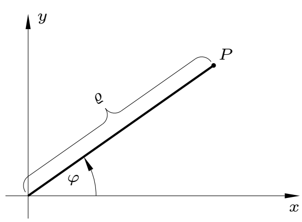
4. Współrzędne biegunowe w całkach podwójnych

Definicja 4.1. *(współrzędne biegunowe)*
Położenie punktu P na płaszczyźnie można opisać parą liczb (φ, ϱ), gdzie:

φ – oznacza miarę kąta między dodatnią częścią osi Ox a promieniem wodzącym punktu P, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ albo $-\pi < \varphi \leqslant \pi$;

ϱ – oznacza odległość punktu P od początku układu współrzędnych, $0 \leqslant \varrho < \infty$.

Parę liczb (φ, ϱ) nazywamy *współrzędnymi biegunowymi* punktu płaszczyzny.

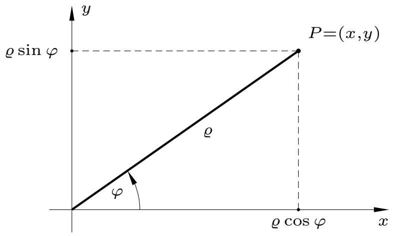


Rys. 4.1. Współrzędne biegunowe punktu

FAKT 4.2. *(zależność między współrzędnymi biegunowymi i kartezjańskimi)*
Współrzędne kartezjańskie (x, y) punktu płaszczyzny danego we współrzędnych biegunowych (φ, ϱ) określone są wzorami:

$$\mathcal{B}: \begin{cases} x = \varrho \cos \varphi, \\ y = \varrho \sin \varphi. \end{cases}$$

Uwaga. Przekształcenie $\mathcal{B}$, które punktowi (φ, ϱ) przyporządkowuje punkt (x, y) określony powyższymi wzorami, nazywamy przekształceniem biegunowym.



Rys. 4.2. Zamiana współrzędnych biegunowych na kartezjańskie

Ćwiczenie 4.3. We współrzędnych biegunowych naszkicować krzywe:

(a) $\varrho = a$, gdzie $a > 0$ oraz $\varphi \in [0, 2\pi)$; (b) $\varrho = a\varphi$, gdzie $a > 0$ oraz $\varphi \in [0, \infty)$;

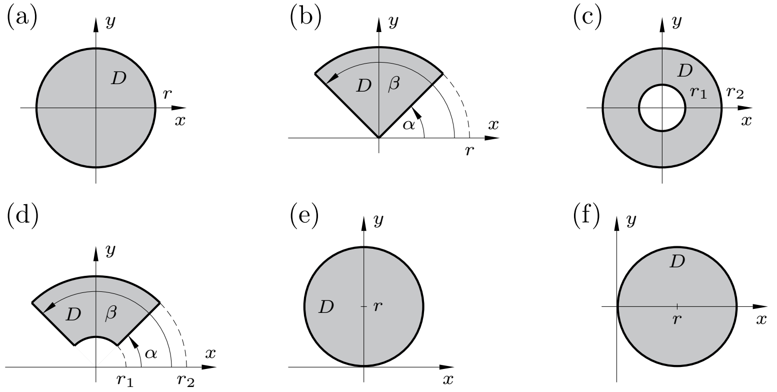
(c) $\varrho = \dfrac{a}{\varphi}$, gdzie $a > 0$ oraz $\varphi \in (0, \infty)$; (d) $\varrho = e^{a\varphi}$, gdzie $a > 0$ oraz $\varphi \in \mathbb{R}$;

(e) $\varrho = a \sin \varphi$, gdzie $a > 0$ oraz $\varphi \in [0, \pi]$;

(f*) $\varrho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, gdzie $a > 0$ oraz $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$;

(g*) $\varrho = \dfrac{a}{2 + \cos \varphi}$, gdzie $a > 0$ oraz $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Ćwiczenie 4.4. Obszary przedstawione na rysunkach zapisać we współrzędnych biegunowych:



TWIERDZENIE 4.5. *(współrzędne biegunowe w całce podwójnej)*
Niech obszar Δ we współrzędnych biegunowych będzie regularny oraz funkcja f będzie ciągła na obszarze D, który jest obrazem zbioru Δ przy przekształceniu biegunowym; $D = \mathcal{B}(\Delta)$. Wtedy

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\Delta} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\varrho\,d\varrho\,d\varphi.$$

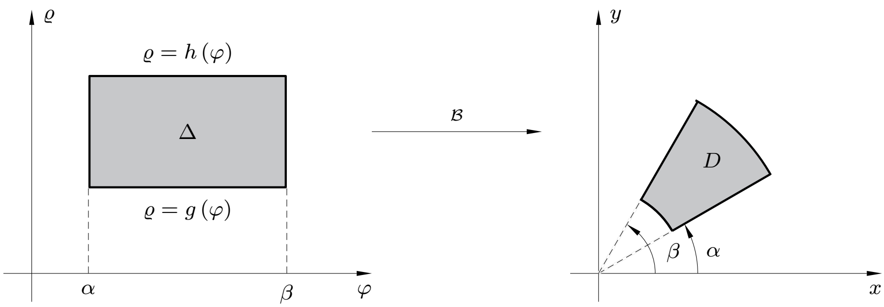
Uwaga. Jeżeli we współrzędnych biegunowych obszar Δ ma postać:

$$\Delta = \{(\varphi,\varrho):\ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\ g(\varphi) \leqslant \varrho \leqslant h(\varphi)\},$$

gdzie funkcje nieujemne g i h są ciągłe na przedziale $[\alpha,\beta] \subset [0,2\pi]$, to

$$\iint\limits_{\Delta} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\varrho\,d\varrho\,d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\varrho\,d\varrho.$$

Współrzędne biegunowe stosujemy wtedy, gdy obszar całkowania jest ograniczony łukami okręgów o środku w początku układu oraz odcinkami prostych przechodzących przez początek układu.



Rys. 4.3. Ilustracja twierdzenia o zamianie zmiennych w całce podwójnej na współrzędne biegunowe

Ćwiczenie 4.6. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki, podwójne, jeżeli obszarem całkowania D jest obszar ograniczony wskazanymi krzywymi:

(a) $\displaystyle\iint\limits_{D} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,dxdy,\ \ D:\ x^2+y^2=2;$

(b) $\displaystyle\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{x^2+y^2-1},\ \ D:\ x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=25;$

(c) $\displaystyle\iint\limits_{D} y\,dxdy,\ \ D:\ x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=1,\ y=x,\ y=0,\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0);$

(d) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $D:\ x^2+y^2=4,\ x=0,\ y=1, (x\leqslant 0,\ y\geqslant 1)$;

(e) $\iint\limits_D x\,dxdy$, $D:\ x^2+(y-1)^2=1,\ y=x,\ (x\geqslant y)$;

(f*) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D:\ \left(x^2+y^2\right)^2-4x\left(x^2+y^2\right)=4y^2,\ x^2+y^2=4,\ (x\geqslant 0)$;

(g*) $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $D:\ \left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2,\ x=0,\ (x\geqslant 0)$.

Ćwiczenie* 4.7. Wprowadza się także *uogólnione współrzędne biegunowe*. Są one określone wzorami:

$$\begin{cases} x=x_0+a\varrho\cos\varphi, \\ y=y_0+b\varrho\sin\varphi, \end{cases}$$

gdzie a, $b>0$. Jacobian jest wtedy równy $ab\varrho$. Korzystając z uogólnionych współrzędnych biegunowych obliczyć podane całki podwójne, jeżeli obszar całkowania D jest ograniczony wskazanymi krzywymi:

(a) $\iint\limits_D xy\,dxdy$, $D:(x-1)^2+(y+1)^2=4$;

(b) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\,dxdy$, $D:\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

5. Zastosowania całek podwójnych w geometrii

1. *Pole obszaru* regularnego $D\subset\mathbb{R}^2$ wyraża się wzorem:

$$\text{pole}\,(D)=\iint\limits_D dP.$$

Ćwiczenie 5.1. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

(a) $x+y=3,\ x=0,\ y=0$;

(b) $x=y^2,\ x=1$;

(c) $y=\cos x,\ y=\sin x,\ x=-\frac{\pi}{4},\ x=\frac{\pi}{4}$;

(d) $xy=1,\ y=x,\ y=2x,\ (x,y>0)$;

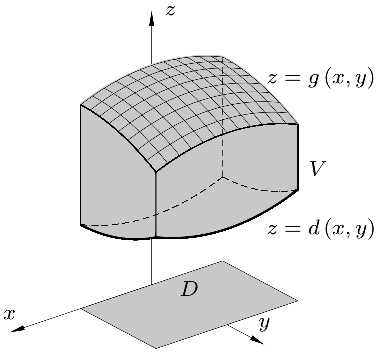
(e) $y=\sqrt{|x|},\ y=x^2$;

(f) $x^2+y^2=2,\ y=0,\ y=x\sqrt{x}\ (x\geqslant 0)$;

(g) $x^2+(y-2)^2=4,\ y=x,\ (y\leqslant x)$;

(h*) $\left(x^2+y^2\right)^2=2\left(x^2-y^2\right), (x\geqslant 0)$.

2. *Objętość bryły* V położonej nad obszarem regularnym $D\subset\mathbb{R}^2$ i ograniczonej z dołu i z góry odpowiednio wykresami funkcji ciągłych $z=d(x,y)$ i $z=g(x,y)$



Rys. 5.1

wyraża się wzorem:

$$\text{objętość}\,(V) = \iint\limits_D \big[g(x,y) - d(x,y)\big]\; dP.$$

Ćwiczenie 5.2. Obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 1;$

(b) $z = 5 - 2x - y,\ x = 0,\ y = 0, z = 0;$

(c) $z = 4 - x^2 - y^2,\ z = 0;$

(d) $z = 9 - x^2,\ z = 0,\ y^2 = 3x;$

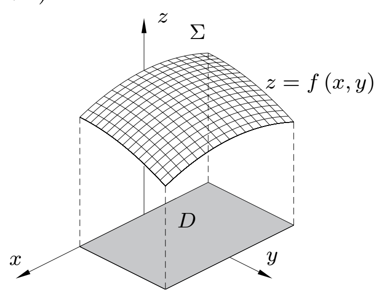
(e) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ z = 0,\ x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 9;$

(f) $z = e^{y-x},\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0, z = 0,\ (x + y \leqslant 1).$

3. *Pole płata* Σ, który jest wykresem funkcji $z = f(x,y)$, położonym nad obszarem regularnym $D \subset \mathbb{R}^2$, wyraża się wzorem

$$\text{pole}\,(\Sigma) = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(f'_x\right)^2 + \left(f'_y\right)^2}\, dP.$$

Zakładamy tu, że funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu na obszarze D.



Rys. 5.2.

Ćwiczenie 5.3. Obliczyć pola części powierzchni $z = f(x,y)$ odciętych powierzchniami:

(a) $f(x,y) = 8 - 2x - 2y,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 = 2x;$

(c) $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2},\ z = 1,\ z = 2;$

(d) $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right),\ x^2 + y^2 = 8;$

(e) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2,\ z = 0;$

(f) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 1,\ z = 2.$

6. Zastosowania całek podwójnych w fizyce

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem regularnym o ciągłej gęstości powierzchniowej masy $\sigma = \sigma(x, y)$. Wtedy:

1. *Masa* M obszaru D wyraża się wzorem:

$$M = \iint\limits_D \sigma(x, y)\, dP.$$

Uwaga. Jeżeli obszar D ma stałą gęstość σ_0, to jego masa wyraża się wzorem

$$M = \sigma_0 \iint\limits_D dP = \sigma_0 \cdot \text{pole}\,(D).$$

2. *Momenty statyczne* MS_x i MS_y, odpowiednio względem osi Ox i Oy, obszaru D wyrażają się wzorami:

$$MS_x = \iint\limits_D y\sigma(x, y)\, dP, \qquad MS_y = \iint\limits_D x\sigma(x, y)\, dP.$$

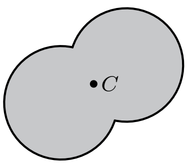
3. *Współrzędne* x_C, y_C *środka* C *masy* obszaru D wyrażają się wzorami:

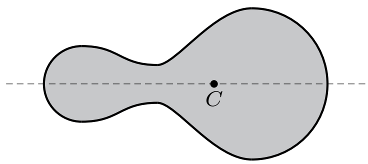
$$x_C = \frac{MS_y}{M} = \frac{\iint\limits_D x\sigma(x, y)\, dP}{\iint\limits_D \sigma(x, y)\, dP}, \qquad y_C = \frac{MS_x}{M} = \frac{\iint\limits_D y\sigma(x, y)\, dP}{\iint\limits_D \sigma(x, y)\, dP}.$$

Uwaga. Jeżeli obszar D ma stałą gęstość, to współrzędne jego środka masy wyrażają się wzorami

$$x_C = \frac{1}{\text{pole}\,(D)} \iint\limits_D x\, dP, \qquad y_C = \frac{1}{\text{pole}\,(D)} \iint\limits_D y\, dP.$$

Ponadto, gdy obszar na płaszczyźnie ma środek symetrii i gęstość powierzchniowa jest funkcją symetryczną względem tego środka (np. jest stała), to środek masy obszaru pokrywa się z jego środkiem symetrii (rysunek). Podobnie, gdy obszar na płaszczyźnie ma oś symetrii i gęstość powierzchniowa jest funkcją symetryczną względem tej osi (np. jest stała), to środek masy obszaru leży na tej osi (rysunek).





4. *Momenty bezwładności* I_x, I_y, odpowiednio względem osi Ox, Oy, obszaru D wyrażają się wzorami:

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \sigma(x,y)\, dP, \qquad I_y = \iint\limits_D x^2 \sigma(x,y)\, dP.$$

Moment bezwładności I_O względem początku układu współrzędnych obszaru D o gęstości powierzchniowej masy σ wyraża się wzorem:

$$I_O = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) \sigma(x,y)\, dP.$$

Uwaga. Jeżeli obszar D jest jednorodny i ma masę M, to powyższe wzory przyjmują postać:

$$I_x = \frac{M}{\text{pole}\,(D)} \iint\limits_D y^2\, dP, \quad I_y = \frac{M}{\text{pole}\,(D)} \iint\limits_D x^2\, dP, \quad I_O = \frac{M}{\text{pole}\,(D)} \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\, dP.$$

Ćwiczenie 6.1.

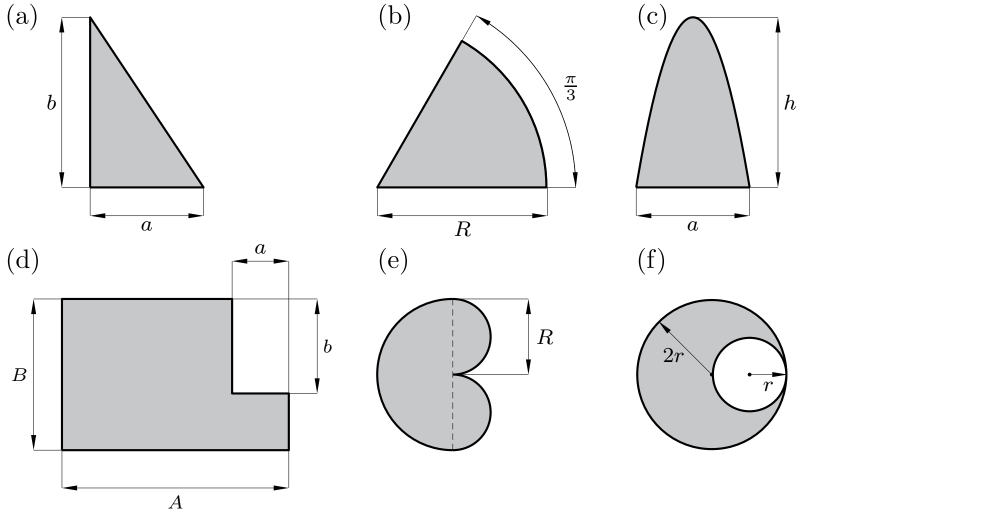
(a) Obliczyć masę obszaru D ograniczonego krzywymi $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$, jeżeli gęstość powierzchniowa masy w punkcie (x, y) tego obszaru wyraża się wzorem $\sigma(x, y) = xy$.

(b) Obliczyć moment statyczny jednorodnego trójkąta równobocznego o boku a i masie M. Moment statyczny obliczyć względem podstawy trójkąta.

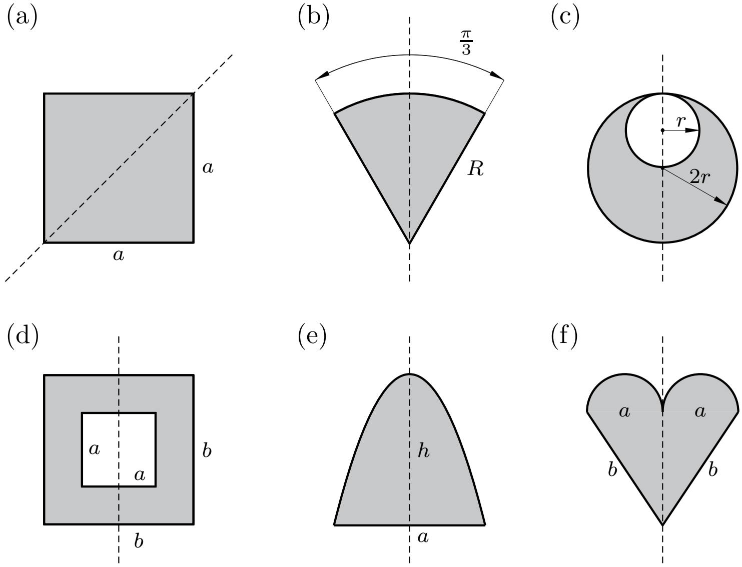
(c) Wyznaczyć współrzędne środka masy jednorodnej ćwiartki koła o promieniu R.

(d) Obliczyć moment bezwładności cienkiej jednorodnej tarczy w kształcie koła o promieniu R i masie M. Moment bezwładności obliczyć względem osi tarczy, która jest do niej prostopadła.

Ćwiczenie 6.2. Wyznaczyć położenia środków masy jednorodnych obszarów przedstawionych poniżej:



Ćwiczenie 6.3. Wyznaczyć momenty bezwładności podanych obszarów jednorodnych o masie M względem wskazanej osi:

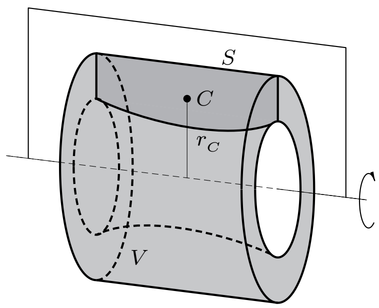


I reguła Pappusa†–Guldina‡

Niech S będzie figurą zawartą w półpłaszczyźnie. Objętość bryły V powstałej z obrotu figury S wokół krawędzi półpłaszczyzny wyraża się wzorem:

$$\text{objętość}\,(V) = 2\pi r_C \;\text{pole}\,(S),$$

gdzie r_C oznacza odległość środka masy figury S od osi obrotu.



Rys. 6.1. Bryła powstała z obrotu figury S wokół krawędzi półpłaszczyzny

---

†Pappus z Aleksandrii, matematyk grecki, III w. p.n.e.
‡Paul Guldin (1577-1643), matematyk szwajcarski.

Ćwiczenie 6.4.
(a) Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu koła o promieniu r wokół prostej leżącej w płaszczyźnie koła, jeżeli odległość środka koła od osi obrotu wynosi R, $R > r$ (torus).

(b) Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu trójkąta równobocznego o boku a wokół osi równoległej do podstawy i położonej od niej w odległości b.

Ćwiczenie 6.5. Wykorzystując I regułę Pappusa–Guldina znaleźć położenia środków masy podanych figur jednorodnych:

(a) półkole o promieniu R;

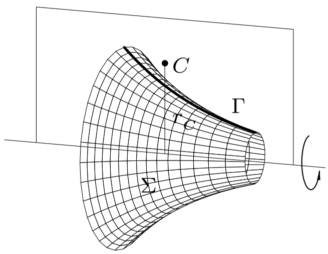
(b) trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a, b.

II reguła Pappusa–Guldina

Niech Γ będzie krzywą zawartą w półpłaszczyźnie. Pole powierzchni Σ powstałej z obrotu krzywej Γ wokół krawędzi półpłaszczyzny wyraża się wzorem:

$$\text{pole}\,(\Sigma) = 2\pi r_C \,\text{długość}\,(\Gamma),$$

gdzie r_C oznacza odległość środka masy krzywej Γ od osi obrotu.



Rys. 6.2. Powierzchnia Σ powstała z obrotu krzywej Γ wokół krawędzi półpłaszczyzny

Ćwiczenie 6.6.
(a) Obliczyć pole powierzchni powstałej z obrotu okręgu o promieniu r wokół prostej leżącej w płaszczyźnie okręgu, jeżeli odległość środka okręgu od osi obrotu wynosi R, $R > r$ (torus).

(b) Obliczyć pole powierzchni bocznej stożka o tworzącej l i promieniu podstawy r.

Ćwiczenie 6.7. Wykorzystując II regułę Pappusa–Guldina znaleźć położenia środków masy podanych krzywych jednorodnych:

(a) brzeg ćwiartki koła o promieniu R;

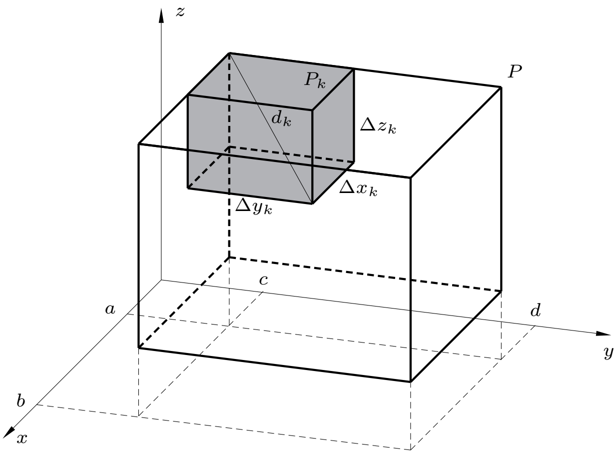
(b) brzeg trójkąta równoramiennego o podstawie a i wysokości h.

5. Całki potrójne

1. Całki potrójne po prostopadłościanie

Definicja 1.1. *(podział prostopadłościanu)*

Podziałem prostopadłościanu $P = \{(x, y, z) : a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d,\ p \leqslant z \leqslant q\}$ nazywamy rodzinę $\mathcal{P}$ złożoną z prostopadłościanów $P_1, P_2, \ldots, P_n$, które całkowicie wypełniają prostopadłościan P i mają parami rozłączne wnętrza.



Rys. 1.1. Podział prostopadłościanu

Oznaczenia stosowane w definicji całki po prostopadłościanie:

Δx_k, Δy_k, Δz_k – wymiary prostopadłościanu P_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$;

$d_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2 + (\Delta z_k)^2}$ – długość przekątnej prostopadłościanu P_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$;

$\delta(\mathcal{P}) = \max\{d_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ – *średnica podziału* $\mathcal{P}$;

$\Xi = \{(x_1^*, y_1^*, z_1^*), (x_2^*, y_2^*, z_2^*), \ldots, (x_n^*, y_n^*, z_n^*)\}$, gdzie $(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \in P_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ – *zbiór punktów pośrednich podziału* $\mathcal{P}$.

Definicja 1.2. *(suma całkowa)*
Niech funkcja f będzie ograniczona na prostopadłościanie P oraz niech $\mathcal{P}$ będzie podziałem tego prostopadłościanu, a Ξ zbiorem punktów pośrednich. *Sumą całkową* funkcji f odpowiadającą podziałowi $\mathcal{P}$ oraz punktom pośrednim Ξ nazywamy liczbę

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*, z_k^*\right)(\Delta x_k)(\Delta y_k)(\Delta z_k).$$

Definicja 1.3. *(całka potrójna po prostopadłościanie)*
Niech funkcja f będzie ograniczona na prostopadłościanie P. *Całkę potrójną* z funkcji f po prostopadłościanie P definiujemy wzorem:

$$\iiint\limits_{P} f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*, z_k^*\right)(\Delta x_k)(\Delta y_k)(\Delta z_k).$$

Zakładamy przy tym, że granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa i nie zależy od sposobu podziału $\mathcal{P}$ prostopadłościanu P ani od sposobu wyboru punktów pośrednich Ξ. Mówimy wtedy, że funkcja f jest *całkowalna* na prostopadłościanie P.

Uwaga. Całkę potrójną z funkcji f po prostopadłościanie P oznaczamy też symbolem:

$$\iiint\limits_{P} f(x,y,z)\,dV.$$

FAKT 1.4. *(o całkowalności funkcji ciągłej)*
Funkcja ciągła na prostopadłościanie jest na nim całkowalna.

TWIERDZENIE 1.5. *(o liniowości całki)*
Niech funkcje f i g będą całkowalne na prostopadłościanie P oraz niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\iiint\limits_{P} \Big(\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)\Big)dV = \alpha \iiint\limits_{P} f(x,y,z)\,dV + \beta \iiint\limits_{P} g(x,y,z)\,dV.$$

TWIERDZENIE 1.6. *(o addytywności względem obszaru całkowania)*
Jeżeli funkcja f jest całkowalna na prostopadłościanie P, to dla dowolnego podziału tego prostopadłościanu na prostopadłościany P_1 i P_2 o rozłącznych wnętrzach zachodzi równość

$$\iiint\limits_{P} f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{P_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_{P_2} f(x,y,z)\,dV.$$

TWIERDZENIE 1.7. *(o zamianie całki potrójnej na całkę iterowaną)*
Jeżeli funkcja f jest ciągła na prostopadłościanie $[a,b]\times[c,d]\times[p,q]$, to

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[p,q]} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_c^d \left[\int\limits_p^q f(x,y,z)\,dz \right] dy \right\} dx.$$

Uwaga. Powyższe twierdzenie będzie prawdziwe także wtedy, gdy po prawej stronie równości napiszemy dowolną inną całkę iterowaną (jest sześć rodzajów całek iterowanych). *Całkę iterowaną*

$$\int\limits_a^b \left\{ \int\limits_c^d \left[\int\limits_p^q f(x,y,z)\;dz \right] dy \right\} dx$$

zapisujemy umownie w postaci

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_p^q f(x,y,z)\;dz.$$

Podobną umowę przyjmujemy dla pozostałych całek iterowanych. W wielu przypadkach wybór odpowiedniej kolejności całkowania pozwala znacznie uprościć obliczenia całki.

Ćwiczenie 1.8. Obliczyć całki iterowane:

(a) $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^2 \left(x^2+y^2+z^2\right) dz;$ (b) $\displaystyle\int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int\limits_0^2 x\cos y\,dx;$

(c) $\displaystyle\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2\pi} xy\sin^2 z\,dz;$ (d) $\displaystyle\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_0^2 dz \int\limits_0^{\pi} xz|\cos y|\,dy;$

(e) $\displaystyle\int\limits_1^2 dy \int\limits_2^3 dz \int\limits_3^4 \frac{1}{xyz}\,dx;$ (f) $\displaystyle\int\limits_0^1 dz \int\limits_{-1}^2 dx \int\limits_0^1 zxe^{xy}\,dy.$

Ćwiczenie 1.9. Obliczyć całki potrójne:

(a) $\displaystyle\iiint\limits_P (2x-y+3z)\,dxdydz$, gdzie $P=[-1,1]\times[0,1]\times[2,4]$;

(b) $\displaystyle\iiint\limits_P \frac{x}{yz}\,dxdydz$, gdzie $P=[0,1]\times[1,2]\times[2,3]$;

(c) $\displaystyle\iiint\limits_P zx\sin xy\,dxdydz$, gdzie $P=\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]\times[0,\pi]\times[0,1]$.

FAKT 1.10. *(całka potrójna z funkcji o rozdzielonych zmiennych)*
Niech funkcje g, h i k będą ciągłe odpowiednio na przedziałach $[a, b]$, $[c, d]$ i $[p, q]$. Wtedy

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[p,q]} g(x)h(y)k(z)\,dxdydz = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d h(y)\,dy\right)\cdot\left(\int_p^q k(z)\,dz\right).$$

Ćwiczenie 1.11. Korzystając z powyższego faktu obliczyć całki potrójne:

(a) $\displaystyle\iiint\limits_P yx^2\sin z\,dxdydz$, gdzie $P = [0, 1]\times[-1, 1]\times\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

(b) $\displaystyle\iiint\limits_P e^{2z+y-x}\,dxdydz$, gdzie $P = [0, \ln 2]\times[0, \ln 3]\times[0, 1]$;

(c) $\displaystyle\iiint\limits_P \ln x^{yz}\,dxdydz$, gdzie $P = [1, e]\times[1, 2]\times[2, 3]$.

2. Całki potrójne po obszarach normalnych

Definicja 2.1. *(całka potrójna po obszarze)*
Niech f będzie funkcją ograniczoną na obszarze ograniczonym $U \subset \mathbb{R}^3$ oraz niech P będzie dowolnym prostopadłościanem zawierającym obszar U. Ponadto niech f^* oznacza rozszerzenie funkcji f na P określone wzorem:

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{dla} \quad (x, y, z) \in U, \\ 0 & \text{dla} \quad (x, y, z) \in P \setminus U. \end{cases}$$

Całkę potrójną funkcji f po obszarze U definiujemy wzorem:

$$\iiint\limits_U f(x, y, z)\,dV = \iiint\limits_P f^*(x, y, z)\,dV,$$

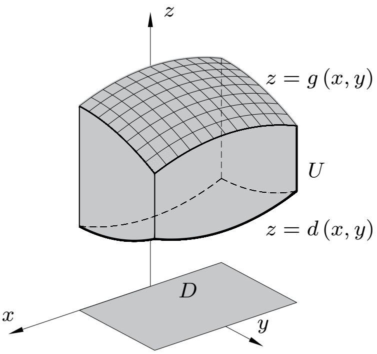
o ile całka po prawej stronie znaku równości istnieje. Mówimy wtedy, że funkcja f jest *całkowalna* na obszarze U.

Uwaga. Całka $\displaystyle\iiint\limits_P f^*(x, y, z)\,dV$ nie zależy od wyboru prostopadłościanu P.

Definicja 2.2. *(obszary normalne względem płaszczyzn układu)*
Obszar domknięty U nazywamy *obszarem normalnym względem płaszczyzny xOy*, jeżeli można go zapisać w postaci:

$$U = \{(x, y, z) :\ (x, y) \in D_{xy},\ d(x, y) \leqslant z \leqslant g(x, y)\},$$

gdzie D_{xy} jest obszarem normalnym na płaszczyźnie xOy, a funkcje d i g są ciągłe na D_{xy}, przy czym $d(x,y) < g(x,y)$ dla punktów (x,y) należących do wnętrza obszaru D_{xy}.



Rys. 2.1. Obszar normalny względem płaszczyzny xOy

Obszar domknięty U nazywamy *obszarem normalnym względem płaszczyzny* xOz, jeżeli można go zapisać w postaci:

$$U = \{(x,y,z): \ (x,z) \in D_{xz}, \ p(x,z) \leqslant y \leqslant q(x,z)\},$$

gdzie D_{xz} jest obszarem normalnym na płaszczyźnie xOz, a funkcje p i q są ciągłe na D_{xz}, przy czym $p(x,z) < q(x,z)$ dla punktów (x,z) należących do wnętrza obszaru D_{xz}.

Obszar domknięty U nazywamy *obszarem normalnym względem płaszczyzny* yOz, jeżeli można go zapisać w postaci:

$$U = \{(x,y,z): \ (y,z) \in D_{yz}, \ r(y,z) \leqslant x \leqslant s(y,z)\},$$

gdzie D_{yz} jest obszarem normalnym na płaszczyźnie yOz, a funkcje r i s są ciągłe na D_{yz}, przy czym $r(y,z) < s(y,z)$ dla punktów (y,z) należących do wnętrza obszaru D_{yz}.

Uwaga. Jeżeli U jest obszarem normalnym względem płaszczyzny xOy, to D_{xy} jest rzutem tego obszaru na tę płaszczyznę. Analogiczna uwaga ma miejsce w dwóch pozostałych przypadkach.

Ćwiczenie 2.3. Obszary ograniczone podanymi powierzchniami zapisać jako obszary normalne względem wskazanej płaszczyzny:

(a) $x+y+z=4$, $x^2+y^2=1$, $z=0$, xOy; (b) $y^2+z^2=4x$, $x=2$, yOz;

(c) $x+y=1$, $y=1-z^2$, $y=0$, $x=1$, zOx; (d) $y=x^2$, $x=y^2$, $z=xy$, $z=0$, xOy.

Ćwiczenie 2.4. Podane obszary zapisać jako obszary normalne względem płaszczyzn układu współrzędnych (rozważyć wszystkie przypadki):

(a) kula $U: \ x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$;

(b) stożek $U: \ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant H$;

(c) walec $U: \ x^2+y^2 \leqslant R^2, \ 0 \leqslant z \leqslant H$;

(d) paraboloida $U: \ x^2+y^2 \leqslant z \leqslant H$.

TWIERDZENIE 2.5. *(całki iterowane po obszarach normalnych)*
Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze domkniętym

$$U = \{(x,y,z) : (x,y) \in D_{xy}, \ d(x,y) \leqslant z \leqslant g(x,y)\},$$

normalnym względem płaszczyzny xOy, gdzie funkcje d i g są ciągłe na obszarze regularnym D_{xy}, to

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} \left(\int\limits_{d(x,y)}^{g(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy.$$

Uwaga. Prawdziwe są także analogiczne wzory z całkami iterowanymi po obszarach normalnych względem pozostałych płaszczyzn układu. Jeżeli obszar U normalny względem płaszczyzny xOy można zapisać w postaci

$$U = \left\{(x,y,z) : a \leqslant x \leqslant b, \ \tilde{d}(x) \leqslant y \leqslant \tilde{g}(x), \quad d(x,y) \leqslant z \leqslant g(x,y)\right\},$$

to zachodzi równość

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\tilde{d}(x)}^{\tilde{g}(x)} dy \int\limits_{d(x,y)}^{g(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Ćwiczenie 2.6. Obliczyć całki iterowane (narysować obszary całkowania):

(a) $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} (x+y+z)^3\,dz$;

(b) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{x} dy \int\limits_0^{x+y} \cos(y+z)\,dz$;

(c) $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz$;

(d) $\displaystyle\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_x^0 dy \int\limits_0^{\sqrt{x^2-y^2}} \sqrt{x^2-y^2}\,dz$;

(e) $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^0 dy \int\limits_0^{x+y} e^z\,dz$;

(f) $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} dy \int\limits_{y^2}^{y} xy\,dz$.

Ćwiczenie 2.7. Całkę potrójną $\displaystyle\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar U ograniczony jest powierzchniami:

(a) $2x+3y+4z=12, \ x=0, \ y=0, \ z=0$;

(b) $y=\sqrt{x^2+z^2}, \ y=1$;

(c) $y=x^2+z^2, \ y=8-x^2-z^2$;

(d) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \ z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Ćwiczenie 2.8. Obliczyć całki potrójne po podanych obszarach:

(a) $\iiint\limits_U xy\,dxdydz$, gdzie $U: \ y=0, \ y=x, \ x=\sqrt{9-z^2}$;

(b) $\iiint\limits_U y\,dxdydz$, gdzie $U: \ z=y, \ z=0, \ y=1-x^2$;

(c) $\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right)\,dxdydz$, gdzie $U: \ z=y^2-x^2, x=0, \ y=1, \ y=x, \ z=0$;

(d) $\iiint\limits_U \cos\frac{z}{y}\,dxdydz$, gdzie $U: \ y=\frac{\pi}{6}, \ y=x, \ x=\frac{\pi}{2}, \ z=xy, \ z=0$;

(e) $\iiint\limits_U x^2yz\,dxdydz$, gdzie $U: \ x=2, \ y=-x, \ y=x^2, \ z=0, \ z=x+y$.

Ćwiczenie 2.9. Zmienić kolejność całkowania w całkach iterowanych (narysować obszar całkowania):

(a) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{2}^{3} f(x,y,z)\,dz$;

(b) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{2} dy \int\limits_{0}^{y} f(x,y,z)\,dz$;

(c) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dz$;

(d) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} dy \int\limits_{-1}^{1} f(x,y,z)\,dz$.

Definicja 2.10. *(obszar regularny w przestrzeni)*

Sumę skończonej liczby obszarów normalnych względem płaszczyzn układu o parami rozłącznych wnętrzach nazywamy *obszarem regularnym* w przestrzeni.

FAKT 2.11. *(całka po obszarze regularnym w przestrzeni)*

Niech obszar regularny U będzie sumą obszarów normalnych $U_1, U_2, \ldots, U_n$ o parami rozłącznych wnętrzach oraz niech funkcja f będzie całkowalna na U. Wtedy

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{U_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_{U_2} f(x,y,z)\,dV + \ldots + \iiint\limits_{U_n} f(x,y,z)\,dV.$$

Uwaga. Całki po obszarach regularnych mają te same własności co całki po prostopadłościanach (liniowość, addytywność względem obszaru całkowania).

Definicja 2.12. *(całka potrójna z funkcji wektorowej)*

Niech funkcje $F_1, \ F_2, \ F_3$ będą całkowalne na obszarze regularnym $U \subset \mathbb{R}^3$. Całkę z funkcji wektorowej $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ określamy wzorem:

$$\iiint\limits_U \boldsymbol{F}(x,y,z)\,dV = \left(\iiint\limits_U F_1(x,y,z)\,dV, \iiint\limits_U F_2(x,y,z)\,dV, \iiint\limits_U F_3(x,y,z)\,dV \right).$$

Definicja 2.13. *(wartość średnia funkcji na obszarze)*
Wartością średnią funkcji f na obszarze U nazywamy liczbę:

$$f_{\text{śr}} = \frac{1}{\text{objętość}\,(U)} \iiint\limits_U f(x,y,z)\,dV.$$

Ćwiczenie 2.14. Obliczyć wartości średnie podanych funkcji na wskazanych obszarach:
(a) $f(x,y,z) = xy^2z^3,\ U = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$;

(b) $f(x,y,z) = x+y+z,\ U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x,\ 0 \leqslant z \leqslant x+y\right\}$.

Ćwiczenie 2.15. W punkcie (x,y,z) prostopadłościanu $U = [0,1]\times[0,2]\times[0,3]$ temperatura jest określona wzorem $T(x,y,z) = y\sin\pi x + z$. Obliczyć średnią temperaturę w tym prostopadłościanie.

Ćwiczenie 2.16. *(interpretacja geometryczna i fizyczna całki potrójnej)*
(a) Wyprowadzić wzór na objętość obszaru $U \subset \mathbb{R}^3$.

(b) Wyprowadzić wzór na masę obszaru materialnego $U \subset \mathbb{R}^3$, którego gęstość objętościowa masy w punkcie $(x,y,z) \in U$ jest równa $\gamma(x,y,z)$.

(c) Wyprowadzić wzory na momenty bezwładności (względem osi układu) obszaru materialnego $U \subset \mathbb{R}^3$ o gęstości objętościowej masy γ.

(d) Wyprowadzić wzór na natężenie pola elektrostatycznego w punkcie $\boldsymbol{r}_0$ pochodzące od ładunku elektrycznego rozłożonego w obszarze $U \subset \mathbb{R}^3$ z gęstością objętościową ładunku γ.

3. Zamiana zmiennych w całkach potrójnych*

Definicja 3.1. *(przekształcenie obszarów w przestrzeni)*
Niech Ω i U będą obszarami odpowiednio w przestrzeni $uOvw$ i $xOyz$. Przekształceniem obszaru Ω w obszar U nazywamy funkcję $\mathcal{T} : \Omega \longrightarrow U$ określoną wzorem

$$(x,y,z) = \mathcal{T}(u,v,w) = \Big(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w)\Big),$$

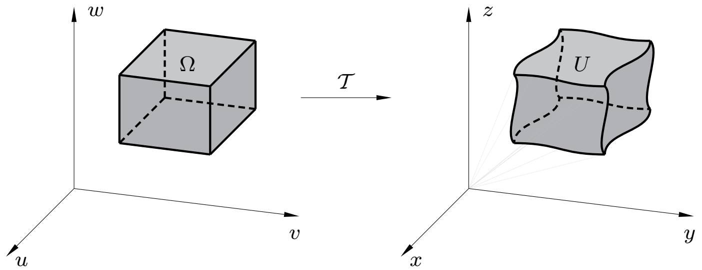
gdzie $(u,v,w) \in \Omega$. Obrazem zbioru Ω przy przekształceniu $\mathcal{T}$ nazywamy zbiór

$$\mathcal{T}(\Omega) = \Big\{(x,y,z) : x = \varphi(u,v,w), y = \psi(u,v,w), z = \chi(u,v,w), (u,v,w) \in \Omega\Big\}.$$

Przekształcenie $\mathcal{T}$ nazywamy:

a) ciągłym, jeżeli funkcje φ, ψ i χ są ciągłe na obszarze Ω;

b) różnowartościowym, jeżeli różnym punktom obszaru Ω odpowiadają różne punkty jego obrazu U.



Rys. 3.1. Przekształcenie obszarów w przestrzeni

FAKT 3.2. *(obraz obszaru przy przekształceniu)*

Obraz obszaru przy przekształceniu ciągłym i różnowartościowym jest obszarem.

Definicja 3.3. *(jakobian przekształcenia)*

Jakobianem przekształcenia $\mathcal{T}(u,v,w) = \Big(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w)\Big)$ nazywamy funkcję określoną wzorem:

$$J_{\mathcal{T}}(u,v,w) = \det \begin{bmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w \\ \psi'_u & \psi'_v & \psi'_w \\ \chi'_u & \chi'_v & \chi'_w \end{bmatrix} (u,v,w).$$

Uwaga. Jakobian oznacza się także przez $\dfrac{\partial(\varphi,\psi,\chi)}{\partial(u,v,w)}$ lub $\dfrac{D(\varphi,\psi,\chi)}{D(u,v,w)}$. Wartość bezwzględna jakobianu przekształcenia w punkcie jest w przybliżeniu stosunkiem objętości obrazu małego otoczenia punktu do objętości tego otoczenia.

TWIERDZENIE 3.4. *(o zamianie zmiennych w całce potrójnej)*

Niech przekształcenie $\mathcal{T}(u,v,w) = \Big(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w)\Big)$ odwzorowuje różnowartościowo wnętrze obszaru regularnego Ω na wnętrze obszaru regularnego U, funkcje φ, ψ, χ mają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na pewnym zbiorze otwartym zawierającym obszar Ω oraz jakobian $J_{\mathcal{T}}$ przekształcenia jest różny od zera wewnątrz obszaru Ω. Ponadto niech funkcja f będzie ciągła na obszarze U. Wtedy

$$\iiint\limits_{U} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} f\Big(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w)\Big)\Big|J_{\mathcal{T}}(u,v,w)\Big|\,dudvdw.$$

Ćwiczenie 3.5. Dokonując odpowiedniej zamiany zmiennych obliczyć całki potrójne:

(a) $\iiint\limits_U x\,dxdydz$, gdzie U jest równoległościanem ograniczonym płaszczyznami:

$$x=0,\ x=1,\ x+y=1,\ x+y=2,\ x+y+z=2,\ x+y+z=3;$$

(b) $\iiint\limits_U \left(x^2+4y^2+9z^2\right)\,dxdydz$, gdzie U jest obszarem ograniczonym

elipsoidą $x^2+4y^2+9z^2=36$;

(c) $\iiint\limits_U dxdydz$, gdzie U jest obszarem ograniczonym powierzchnią

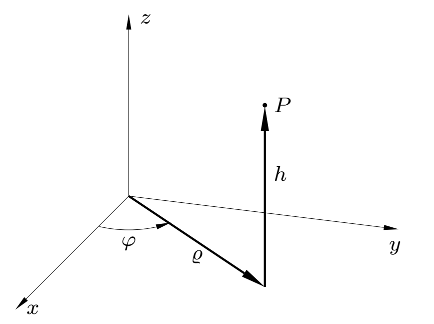
$(x-y)^2+(x+y)^2=r^2$ oraz płaszczyznami $x+y+z=0$, $x+y+z=h$;

(d*) $\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right)\,dxdydz$, gdzie U jest torusem, tj. bryłą powstałą przez obrót

koła $(x-R)^2+z^2\leqslant r^2$, $y=0$, gdzie $0<r\leqslant R$, wokół osi Oz.

4. Współrzędne walcowe w całkach potrójnych

Definicja 4.1. *(współrzędne walcowe)*
Położenie punktu P w przestrzeni można opisać trójką liczb (φ,ϱ,h), gdzie:
φ – oznacza miarę kąta między rzutem promienia wodzącego punktu P na płaszczyznę xOy, a dodatnią częścią osi Ox, $0\leqslant\varphi<2\pi$ albo $-\pi<\varphi\leqslant\pi$,
ϱ – oznacza odległość rzutu punktu P na płaszczyznę xOy od początku układu współrzędnych, $0\leqslant\varrho<\infty$,
h – oznacza odległość (dodatnią dla $z>0$ i ujemną dla $z<0$) punktu P od płaszczyzny xOy, $-\infty<h<\infty$.
Trójkę liczb (φ,ϱ,h) nazywamy *współrzędnymi walcowymi* punktu przestrzeni.

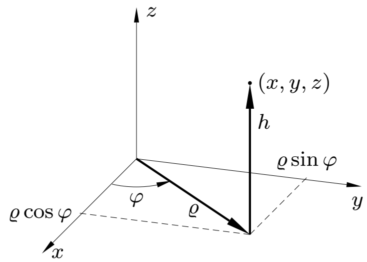


Rys. 4.1. Współrzędne walcowe punktu

FAKT 4.2. *(zależność między współrzędnymi walcowymi i kartezjańskimi)*
Współrzędne kartezjańskie (x,y,z) punktu przestrzeni danego we współrzędnych walcowych (φ,ϱ,h) określone są wzorami:

$$\mathcal{W}:\ \begin{cases} x=\varrho\cos\varphi,\\ y=\varrho\sin\varphi,\\ z=h.\end{cases}$$

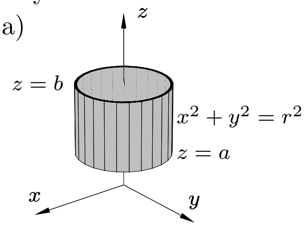
Uwaga. Przekształcenie $\mathcal{W}$, które punktowi $(\varphi,\ \varrho,\ h)$ przyporządkowuje punkt $(x,\ y,\ z)$ określony powyższymi wzorami, nazywamy przekształceniem walcowym.



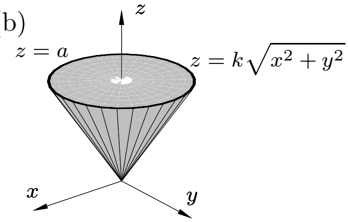
Rys. 4.2. Zamiana współrzędnych walcowych na kartezjańskie

Ćwiczenie 4.3. Obszary przedstawione na rysunkach zapisać, we współrzędnych walcowych:

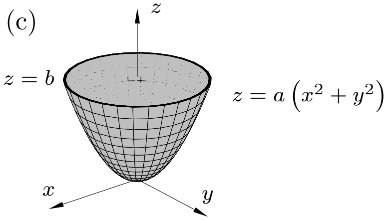
(a)



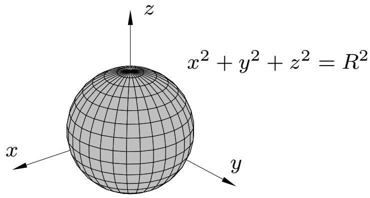
(b)



(c)



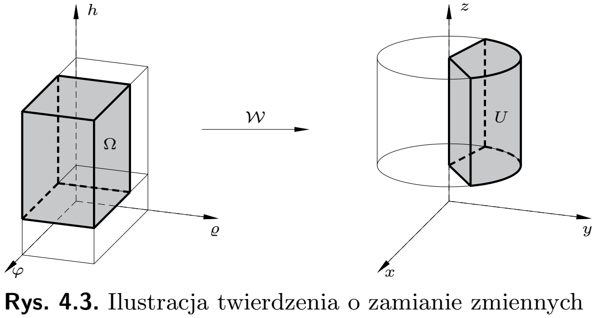
(d)



TWIERDZENIE 4.4. *(współrzędne walcowe w całce potrójnej)*

Niech obszar Ω we współrzędnych walcowych będzie obszarem normalnym, oraz funkcja f będzie ciągła na obszarze U, który jest obrazem obszaru Ω przy przekształceniu walcowym; $U = \mathcal{W}(\Omega)$. Wtedy

$$\iiint\limits_U f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_\Omega f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, h)\varrho\, dh\, d\varrho\, d\varphi.$$



Rys. 4.3. Ilustracja twierdzenia o zamianie zmiennych w całce potrójnej na współrzędne walcowe

Uwaga. Jeżeli we współrzędnych walcowych obszar Ω ma postać:

$$\Omega = \Big\{(\varphi, \varrho, h): \ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, \ \tilde{d}(\varphi) \leqslant \varrho \leqslant \tilde{g}(\varphi), \ d(\varphi, \varrho) \leqslant h \leqslant g(\varphi, \varrho)\Big\},$$

gdzie funkcje $\tilde{d}$ i $\tilde{g}$ są ciągłe na przedziale $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$, a funkcje d i g są ciągłe na obszarze $\Big\{(\varphi, \varrho): \ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, \ \tilde{d}(\varphi) \leqslant \varrho \leqslant \tilde{g}(\varphi)\Big\}$, to

$$\iiint\limits_{\Omega} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, h)\varrho \, dh \, d\varrho \, d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\tilde{d}(\varphi)}^{\tilde{g}(\varphi)} d\varrho \int\limits_{d(\varphi,\varrho)}^{g(\varphi,\varrho)} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, h)\varrho \, dh.$$

Współrzędne walcowe stosujemy wtedy, gdy obszar całkowania jest ograniczony fragmentami walców, sfer, stożków lub płaszczyzn. Wprowadza się także *uogólnione współrzędne walcowe*

$$\begin{cases} x = x_0 + a\varrho\cos\varphi, \\ y = y_0 + b\varrho\sin\varphi, \\ z = h, \end{cases}$$

gdzie a, $b > 0$. Jacobian takiego przekształcenia jest równy $ab\varrho$.

Ćwiczenie 4.5. Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć podane całki po obszarach ograniczonych wskazanymi powierzchniami:

(a) $\displaystyle\iiint\limits_U x^2 \, dxdydz$, gdzie $U: \ z = 9 - x^2 - y^2, \ z = 0;$

(b) $\displaystyle\iiint\limits_U \left(x^2 + y^2\right) dxdydz$, gdzie $U: z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, \ z = 8;$

(c) $\displaystyle\iiint\limits_U z^2 \, dxdydz$, gdzie $U: z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}, \ z = \sqrt{x^2 + y^2};$

(d) $\displaystyle\iiint\limits_U xyz \, dxdydz$, gdzie $U: \ x^2 + y^2 + z^2 = 4;$

(e*) $\displaystyle\iiint\limits_U \sqrt{x^2 + y^2} \, dxdydz$, gdzie $U: \ z = x^2 + y^2, \ z = 1, \ z = 4;$

(f*) $\displaystyle\iiint\limits_U dxdydz$, gdzie $U: \ z = x^2 + y^2, \ z = 4x.$

5. Współrzędne sferyczne w całkach potrójnych

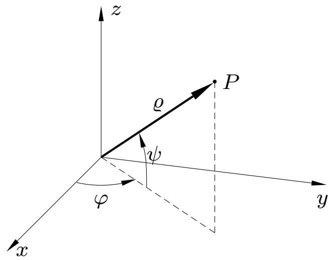
Definicja 5.1. *(współrzędne sferyczne)*

Położenie punktu P w przestrzeni można opisać trójką liczb (φ, ψ, ϱ), gdzie

φ – oznacza miarę kąta między rzutem promienia wodzącego punktu P na płaszczyznę xOy, a dodatnią częścią osi Ox, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ albo $-\pi < \varphi \leqslant \pi$;

ψ – oznacza miarę kąta między promieniem wodzącym punktu P, a płaszczyzną xOy, $-\pi/2 \leqslant \psi \leqslant \pi/2$;

ϱ – oznacza odległość punktu P od początku układu współrzędnych, $0 \leqslant \varrho < \infty$.



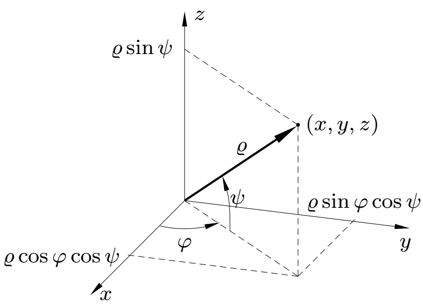
Rys. 5.1. Współrzędne sferyczne

Trójkę liczb (φ, ψ, ϱ) nazywamy *współrzędnymi sferycznymi* punktu przestrzeni.

Uwaga. Współrzędne sferyczne (φ, ψ, ϱ) punktów położonych na powierzchni Ziemi są odpowiednio długością i szerokością geograficzną, a ϱ jest promieniem Ziemi.

FAKT 5.2. *(zależność między współrzędnymi sferycznymi i kartezjańskimi)* Współrzędne kartezjańskie punktu (x, y, z) w przestrzeni danego we współrzędnych sferycznych (φ, ψ, ϱ) określone są wzorami:

$$\mathcal{S}: \begin{cases} x = \varrho \cos\varphi \cos\psi, \\ y = \varrho \sin\varphi \cos\psi, \\ z = \varrho \sin\psi. \end{cases}$$



Rys. 5.2. Zamiana współrzędnych sferycznych na kartezjańskie

Uwaga. Przekształcenie $\mathcal{S}$, które punktowi (φ, ψ, ϱ) przyporządkowuje punkt (x, y, z) określony powyższymi wzorami, nazywamy *przekształceniem sferycznym*.

Ćwiczenie 5.3. Podać opisy we współrzędnych sferycznych obszarów:
(a) kula o środku w początku układu i promieniu $r > 0$;
(b) czasza kulista ograniczona powierzchnią sfery $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ i płaszczyzną

$z = a$ $(0 < a < r)$;

(c) stożek ograniczony powierzchniami $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = a$, $(k > 0,\ a > 0)$;

(d) kula o środku $(r, 0, 0)$ i promieniu $r > 0$;

(e) kula o środku $(0, r, 0)$ i promieniu $r > 0$;

(f) kula o środku $(0, 0, r)$ i promieniu $r > 0$;

(g) górna półkula wydrążona o środku w początku układu, promieniu wewnętrznym r_1 i promieniu zewnętrznym r_2 $(0 < r_1 < r_2)$;

(h) wycinek kuli o środku w początku układu i promieniu r ograniczony półpłaszczyznami przechodzącymi przez oś Oz i tworzącymi kąty α i β z dodatnią częścią osi Ox, gdzie $0 \leqslant \alpha < \beta < 2\pi$ oraz $r > 0$.

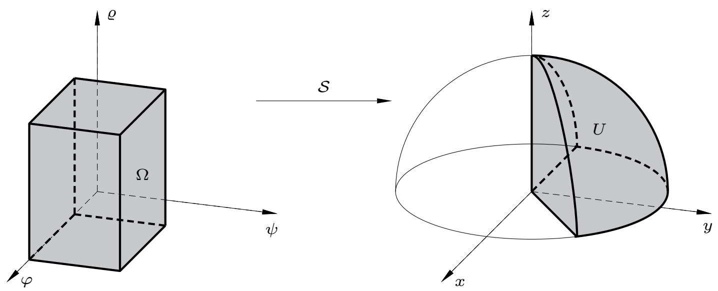
TWIERDZENIE 5.4. *(współrzędne sferyczne w całce potrójnej)*
Niech obszar Ω we współrzędnych sferycznych będzie obszarem normalnym oraz funkcja f będzie ciągła na obszarze U, który jest obrazem obszaru Ω przy przekształceniu sferycznym; $U = \mathcal{S}(\Omega)$. Wtedy

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega f(\varrho\cos\varphi\cos\psi, \varrho\sin\varphi\cos\psi, \varrho\sin\psi)\varrho^2\cos\psi\ d\varrho d\psi d\varphi.$$

Uwaga. Jeżeli we współrzędnych sferycznych obszar Ω ma postać:

$$\left\{(\varphi,\psi,\varrho):\ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\ \tilde{d}(\varphi) \leqslant \psi \leqslant \tilde{g}(\varphi), d(\varphi,\psi) \leqslant \varrho \leqslant g(\varphi,\psi)\right\},$$

gdzie funkcje $\tilde{d}$ i $\tilde{g}$ są ciągłe na przedziale $[\alpha,\beta] \subset [0,2\pi]$, a funkcje d i g są ciągłe na obszarze $\left\{(\varphi,\psi):\ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, \tilde{d}(\varphi) \leqslant \psi \leqslant \tilde{g}(\varphi)\right\}$, to



Rys. 5.3. Ilustracja twierdzenia o zamianie zmiennych w całce potrójnej na współrzędne sferyczne

$$\iiint\limits_\Omega f(\varrho\cos\varphi\cos\psi, \varrho\sin\varphi\cos\psi, \varrho\sin\psi)\varrho^2\cos\psi\ d\varrho d\psi d\varphi$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\tilde{d}(\varphi)}^{\tilde{g}(\varphi)} d\psi \int\limits_{d(\varphi,\psi)}^{g(\varphi,\psi)} f\left(\varrho\cos\varphi\cos\psi, \varrho\sin\varphi\cos\psi, \varrho\sin\psi\right)\varrho^2\cos\psi\, d\varrho.$$

Wprowadza się także *uogólnione współrzędne sferyczne*

$$\begin{cases} x = x_0 + a\varrho\cos\varphi\cos\psi, \\ y = y_0 + b\varrho\sin\varphi\cos\psi, \\ z = z_0 + c\varrho\sin\psi, \end{cases}$$

gdzie a, b, $c > 0$. Jacobian takiego przekształcenia jest równy $abc\varrho^2\cos\psi$. Współrzędne sferyczne stosujemy do opisu obszarów całkowania, które są ograniczone fragmentami sfer, stożków lub płaszczyzn.

Ćwiczenie 5.5. Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć podane całki po obszarach ograniczonych wskazanymi powierzchniami:

(a) $\displaystyle\iiint\limits_U z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, gdzie U: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $z=0$;

(b) $\displaystyle\iiint\limits_U \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, gdzie U: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $z=\dfrac{1}{2}$;

(c) $\displaystyle\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right)\,dxdydz$, gdzie U: $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

(d) $\displaystyle\iiint\limits_U \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, gdzie U: $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2++z^2=16$;

(e) $\displaystyle\iiint\limits_U \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, gdzie U: $x^2+y^2+z^2-z=0$;

(f) $\displaystyle\iiint\limits_U xyz\,dxdydz$, gdzie U: $x^2+y^2+z^2=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ (I oktant);

(g*) $\displaystyle\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right)\,dxdydz$, gdzie U: $x^2+y^2=4$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$.

6. Zastosowania całek potrójnych w geometrii i fizyce

1. *Objętość obszaru* regularnego $U \subset \mathbb{R}^3$ wyraża się wzorem:

$$\text{objętość}\,(U) = \iiint\limits_U dV.$$

Ćwiczenie 6.1. Obliczyć objętości obszarów ograniczonych powierzchniami:

(a) $3x+6y+4z=12$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

(b) $y=x^2$, $y+z=4$, $x=0$, $z=0$;

(c) $y^2+z^2=1$, $y=x$, $x=0\,(x\geqslant 0)$;

(d) $x^2+y^2+z^2=16$, $x^2+y^2=4x$;

(e) $x^2+y^2+z^2=9$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

(f) $z=4x^2+y^2$, $z=4-3y^2$.

Dalej niech $U \subset \mathbb{R}^3$ będzie obszarem regularnym o ciągłej gęstości objętościowej masy $\gamma = \gamma(x, y, z)$. Wtedy:

2. *Masa* M obszaru U wyraża się wzorem:

$$M = \iiint\limits_U \gamma(x, y, z)\, dV.$$

Uwaga. Jeżeli obszar U ma stałą gęstość γ_0, to jego masa wyraża się wzorem

$$M = \gamma_0 \cdot \iiint\limits_U dV = \gamma_0 \cdot \text{objętość}\,(U).$$

3. *Momenty statyczne* MS_{xy}, MS_{xz}, MS_{yz} względem płaszczyzn układu współrzędnych obszaru U wyrażają się wzorami:

$$MS_{xy} = \iiint\limits_U z\gamma(x, y, z)\, dV, \quad MS_{xz} = \iiint\limits_U y\gamma(x, y, z)\, dV, \quad MS_{yz} = \iiint\limits_U x\gamma(x, y, z)\, dV.$$

4. *Współrzędne* x_C, y_C, z_C *środka* C *masy* obszaru U wyrażają się wzorami:

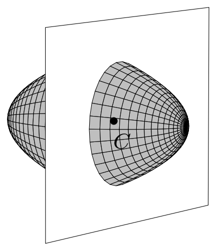
$$x_C = \frac{MS_{yz}}{M}, \ y_C = \frac{MS_{xz}}{M}, \ z_C = \frac{MS_{xy}}{M}.$$

Uwaga. Jeżeli obszar U ma stałą gęstość, to współrzędne jego środka masy wyrażają się wzorami

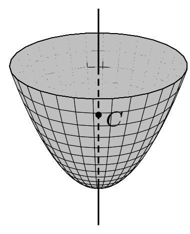
$$x_C = \frac{1}{\text{objętość}\,(U)} \iiint\limits_U x\, dV, \qquad y_C = \frac{1}{\text{objętość}\,(U)} \iiint\limits_U y\, dV,$$

$$z_C = \frac{1}{\text{objętość}\,(U)} \iiint\limits_U z\, dV.$$

Jeżeli bryła w przestrzeni ma płaszczyznę symetrii a gęstość objętościowa masy jest funkcją symetryczną względem tej płaszczyzny (np. jest stała), to jej środek masy leży na tej płaszczyźnie.



Jeżeli zaś bryła ma oś symetrii lub oś obrotu a gęstość objętościowa masy jest funkcją symetryczną względem tej osi (np. jest stała), to jej środek masy leży na tej osi.



Jeżeli bryła w przestrzeni ma środek symetrii i gęstość objętościowa masy jest funkcją symetryczną względem tego środka (np. jest stała), to środek masy bryły pokrywa się ze środkiem symetrii.

5. *Momenty bezwładności* I_x, I_y, I_z, odpowiednio względem osi Ox, Oy, Oz, obszaru U wyrażają się wzorami:

$$I_x = \iiint\limits_U \left(y^2 + z^2\right) \gamma(x, y, z)\, dV, \qquad I_y = \iiint\limits_U \left(x^2 + z^2\right) \gamma(x, y, z)\, dV,$$

$$I_z = \iiint\limits_U \left(x^2 + y^2\right) \gamma(x, y, z)\, dV,$$

a moment bezwładności I_O obszaru U względem początku układu – wzorem:

$$I_O = \iiint\limits_U \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \gamma(x, y, z)\, dV.$$

Uwaga. Jeżeli obszar U jest jednorodny i ma masę M, to wzory na momenty bezwładności przyjmują postać:

$$I_x = \frac{M}{\text{objętość}\,(U)} \iiint\limits_U \left(y^2 + z^2\right)\, dV, \quad I_y = \frac{M}{\text{objętość}\,(U)} \iiint\limits_U \left(x^2 + z^2\right)\, dV,$$

$$I_z = \frac{M}{\text{objętość}\,(U)} \iiint\limits_U \left(x^2 + y^2\right)\, dV \text{ oraz } I_O = \frac{M}{\text{objętość}\,(U)} \iiint\limits_U \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\, dV.$$

Ćwiczenie 6.2.

(a) Znaleźć masę kuli o promieniu R, jeżeli gęstość masy w odległości r od środka kuli wynosi r^2.

(b) Jednorodna bryła o masie M jest ograniczona płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 3$. Obliczyć momenty statyczne tej bryły względem płaszczyzn układu współrzędnych.

(c) Znaleźć położenie środka masy jednorodnej bryły ograniczonej powierzchniami $z = x^2 + y^2$, $z = 4$.

(d) Jednorodna półkula o promieniu R ma masę M. Obliczyć moment bezwładności tej półkuli względem jej osi symetrii.

(e) Jednorodny bąk o masie M ma kształt stożka o wysokości H i promieniu R. Obliczyć moment bezwładności tego bąka względem jego wierzchołka.

Ćwiczenie 6.3. Wyznaczyć położenie środków masy jednorodnych brył:

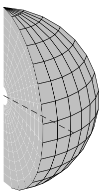
(a) stożka ściętego o wysokości H i promieniach r i R (rysunek (a));

(b) jednej czwartej stożka o wysokości H i promieniu podstawy R (rysunek (b));

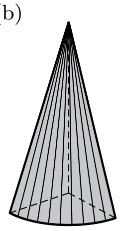
(c) jednej szóstej kuli o promieniu R (rysunek (c));

(d) prostopadłościanu o wymiarach A, B, C, z którego wierzchołka wycięto mniejszy prostopadłościan o wymiarach a, b, c (rysunek (d)).

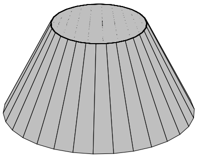
(a)



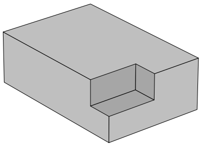
(b)



(c)



(d)



Odpowiedzi i wskazówki

Rozdział 1.

Paragraf 1. (str. 9)

1.2. (a) $1/2$; (b) ∞; (c) $\pi/4$; (d) rozbieżna; (e) $-\infty$; (f) -1; (g*) rozbieżna; (h*) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

1.4. (a) $\pi/2$; (b) rozbieżna; (c) ∞; (d) $\pi/\sqrt{5}$; (e) 2; (f) rozbieżna; (g) ∞; (h) rozbieżna.

1.6. (a); (d) zbieżna; (b); (c); (e); (f) rozbieżna.

1.7. Zbieżna dla $p > 1$, rozbieżna do ∞ dla $p \leqslant 1$.

1.10. (a) π; (b) 0; (c) 0; (d) ∞.

Paragraf 2. (str. 12)

2.2. (a); (b); (d); (g*); (h*) zbieżna; (c); (e); (f) rozbieżna do ∞; (i*) rozbieżna do $-\infty$.

2.4. (a); (d); (e); (f); (g*); (h*); (i*) zbieżna; (b); (c) rozbieżna.

Paragraf 3. (str. 14)

3.2. (a); (b); (c) zbieżna bezwzględnie; (d*) nie jest zbieżna bezwzględnie.

3.4. (a) rozbieżna, nie jest zbieżna bezwzględnie; (b); (c); (d); (e); (f); (h*) zbieżna, zbieżna bezwzględnie; (g*); (i*) zbieżna, nie jest zbieżna bezwzględnie.

Paragraf 4. (str. 15)

4.2. (a) 4; (b) ∞; (c) 0; (d) $3/2$; (e) $\pi/6$; (f) ∞; (g) $-\infty$; (h) $-4/3$.

4.4. (a); (d); (c) rozbieżna; (b) zbieżna.

4.6. (a) ∞; (b) 0; (c) rozbieżna; (d) ∞; (e) $\pi^2/2$; (f) 0; (g) rozbieżna; (h*) π.

4.8. (a) 0; (b) 6; (c) 0; (d) $-(\ln 3)/2$.

Paragraf 5. (str. 19)

5.2. (a); (c) zbieżna; (b); (d*) rozbieżna.

5.4. (a); (b); (d); (e); (h*) zbieżna; (c); (f); (g) rozbieżna.

5.5* (a); (c); (d); (g*); (h*) rozbieżna; (b); (e); (f*) zbieżna.

5.6. (a) objętość $(V) = \pi$, pole $(\Sigma) = \infty$; (b) $W = mgR$; (c) $x_C = \dfrac{2}{5}$, $y_C = 1$; (d) $\dfrac{1}{\pi\varepsilon_0}$;
(e*) $\dfrac{2Gm\lambda_0}{r}$.

Rozdział 2.

Paragraf 1. (str. 22)

1.2. (a) $\dfrac{7}{3}\left(1-\left(\dfrac{7}{10}\right)^n\right)+\dfrac{3}{7}\left(1-\left(\dfrac{3}{10}\right)^n\right)$; (b) $1-\dfrac{1}{n+1}$; (c) $\sqrt{2}-\sqrt[n+2]{2}$;
(d) $-\ln(n+1)$; (e*) $\dfrac{7}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-4\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$; (f*) $1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

1.4. (a) $-\dfrac{1}{2}$; (b) rozbieżny; (c) ∞; (d) ∞;
(e*) 1, wsk. $\dfrac{4n^2+2n-1}{(2n+1)!}=\dfrac{1}{(2n-1)!}-\dfrac{1}{(2n+1)!}$; (f*) rozbieżny.

1.8. (a) 999999; (b) $-\dfrac{3}{7}$; (c) ∞; (d) 1; (e*) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{17}}$; (f*) rozbieżny.

1.10. (a) $x \in (-1,1)$, $S(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$; (b) $x\in(0,\infty)$, $S(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$;
(c) $x \in \left(\dfrac{\pi}{3}+k\pi, \dfrac{2\pi}{3}+k\pi\right)$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$, $S(x)=\dfrac{\cos x}{1+2\cos x}$.

Paragraf 2. (str. 25)

2.2. (a); (e); (g); (h*) rozbieżny; (b); (c); (d); (f) zbieżny.

2.3* $f(x)=\begin{cases} 1/x & \text{dla } x\in[1,\infty)\setminus\mathbb{N}, \\ 1/x^2 & \text{dla } x\in\mathbb{N}; \end{cases}$ $f(x)=\begin{cases} 1/x^2 & \text{dla } x\in[1,\infty)\setminus\mathbb{N}, \\ 1/x & \text{dla } x\in\mathbb{N}. \end{cases}$

2.5. (c); (e).

2.7. (a) zbieżny; (b) rozbieżny; (c) rozbieżny; (d) rozbieżny; (e) zbieżny;
(f) zbieżny, wsk. wykorzystać nierówność $\sin x < x$ dla $x > 0$;
(g*) zbieżny, wsk. uzasadnić i wykorzystać nierówność $\ln x < 2\sqrt{x}$;
(h*) rozbieżny, wsk. wykorzystać nierówność $\operatorname{tg} x > x$ dla $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

2.9. (a); (c); (d); (g*); (h*) zbieżny; (b); (e); (f); (i*) rozbieżny.

2.11. (a) $q=0$, zbieżny; (b) $q=2$, rozbieżny; (c) $q=\infty$, rozbieżny;
(d) $q=e$, rozbieżny; (e) $q=\dfrac{1}{\pi}$, zbieżny; (f) $q=\dfrac{3}{4}$, zbieżny; (g*) $q=\dfrac{3}{e}$, rozbieżny;
(h*) $q=\dfrac{2^2 3^3}{5^5}$, zbieżny.

2.13. (a) $q=1/2$, zbieżny; (b) $q=4/5$, zbieżny; (c) $q=3/5$, zbieżny; (d) $q=1/\pi$, zbieżny;
(e) $q=1/e$, zbieżny; (f) $q=\pi/2$, rozbieżny; (g) $q=0$, zbieżny;
(h) $q=\ln 2$, zbieżny; (i) $q=1/3$, zbieżny.

Paragraf 3. (str. 29)

3.3. (a) $\frac{1879}{2520}$; (b) $\frac{53}{144}$.

3.5. (b); (c); (d); (e) - szeregi zbieżne bezwzględnie.

3.9. (a); (e); (f) - szeregi zbieżne bezwzględnie;
(b); (c); (d) - szeregi zbieżne warunkowo.

Paragraf 4. (str. 31)

4.2. (a) $c_n = \frac{n+1}{2^n}$; (b) $c_n = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n = 2k-1, \\ \frac{1}{3^n} & \text{dla} \quad n = 2k; \end{cases}$ (c) $c_n = \frac{5^n}{n!}$;

(d*) $c_n = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n = 2k-1, \\ \frac{n+2}{2^{n+1}} & \text{dla} \quad n = 2k. \end{cases}$

Paragraf 5. (str. 32)

5.5. (a) $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x \in [0,1), \\ 1 \text{ dla } x = 1; \end{cases}$ (b) $f(x) \equiv 1$, $x \in [0, \infty)$;

(c) $f(x) = \ln x$, $x \in (0, \infty)$; (d) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x \in [0,1], \\ x \text{ dla } x \in (1,2]; \end{cases}$

(e) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$; (f) $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x = 0 \\ 1 \text{ dla } x > 0; \end{cases}$

(g) $f(x) = 0$ dla $x = 0$; (h*) $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{Q}$.

5.7. (a); (b); (d) zbieżny jednostajnie; (c) nie jest zbieżny jednostajnie.

5.8. (a) $f(x) \equiv 1$, nie jest zbieżny jednostajnie;
(b) $f(x) = x^2$, zbieżny jednostajnie; (c) $f(x) \equiv 1$, zbieżny jednostajnie;
(d) $f(x) \equiv 0$, zbieżny jednostajnie.

5.10. (a) $f(x) = x$; (b) $f(x) \equiv 0$; (c) $f(x) = |x|$; (d) $f(x) \equiv 0$; (e) $f(x) = \sin x$;
(f) $f(x) \equiv 0$.

5.11. (b) Nie. Wsk. Rozważyć ciągi $f_n(x) = x$, $g_n \equiv \frac{1}{n}$ na zbiorze $Y = [0, \infty)$.

5.16. Wsk. Wykorzystać fakt, że granica nie jest funkcją ciągłą.

5.17. Wsk. Wykorzystać fakt, że granica nie jest funkcją ciągłą.

Paragraf 6. (str. 37)

6.4. (a) $x \in (-2, 0)$, $-\frac{x+1}{x}$; (b) $x \in (0, \infty)$, $\frac{e^x}{e^x - 1}$; (c) $x \in \mathbb{R}$;
(d) $x \in (-1, 1)$, x; (e) $x \in [-1, 1]$; (f) $x \in \mathbb{R}$.

6.7. (a) $|x| > 1$; (b) $\sqrt{3} < |x| < \sqrt{5}$; (c) $|x| < 3$; (d) $\emptyset$.

Paragraf 7. (str. 42)

7.3. (a) $x_0 = -5$, $c_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n$, $R = \frac{3}{5}$; (b) $x_0 = 3$, $c_n = \frac{1}{2^n}$, $R = 2$;

(c) $x_0 = 2$, $c_n = \dfrac{(-3)^n}{3^n + 2^n}$, $R = 1$; (d) $x_0 = 0$, $c_n = \dfrac{1}{(n+1)2^n}$, $R = 2$;
(e) $x_0 = 0$, $c_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$, $R = \infty$; (f) $x_0 = 4$, $c_n = (-2)^n$, $R = \dfrac{1}{2}$;
(g*) $x_0 = -1$, $c_n = \sin\dfrac{1}{n}$, $R = 1$;
(h*) $x_0 = 0$, $c_n = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n = 3k \pm 1, \\ 5^k & \text{dla} \quad n = 3k, \end{cases}$ $\quad R = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$;
(i*) $x_0 = 0$, $c_n = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n = 2k - 1, \\ \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} & \text{dla} \quad n = 2k, \end{cases}$ $\quad R = \infty$.

7.6. (a) $[1, 3)$; (b) $(-2, 0]$; (c) $\left(-\dfrac{13}{2}, \dfrac{19}{2}\right)$; (d) $[-1, 1]$; (e*) $[0, 2]$; (f*) $(-\infty, \infty)$.

7.7. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n2^n}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2 3^n}$; (d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$; (e*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n (x-e)^n$.

7.9. (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$, $0 < x < 2$; (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{e(n+2)}{n!}(x-1)^n$, $x \in \mathbb{R}$.
(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(\ln 2 - n)\ln^{n-1} 2}{2n!}(x-1)^n$, $x \in \mathbb{R}$;
(c*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n$, $0 < x < 2$.

7.13. (a) $3^{100}100!$; (b) $49!$; (c) $\dfrac{18!}{2^{21}}$; (d) 0; (e*) 0; (f*) $-\dfrac{20!}{4^{11}}$;
(g*) Wska. Wykorzystać tożsamość $\sin x \cos 3x = \dfrac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)$;
(h*) Wsk. Podstawić $x = t + \dfrac{\pi}{2}$ i wykorzystać wzory Eulera.

7.14. (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2^n}{n!} x^n$, $R = \infty$; (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3^n}{2^{n+1}} x^n$, $R = \dfrac{2}{3}$;
(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} -\dfrac{1}{6}\left(2 + \dfrac{(-1)^n}{2^n}\right) x^n$, $R = 1$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$, $R = \infty$;
(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{(2n)!} x^{4n}$, $R = \infty$; (f*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n}{2(2n)!} x^{2n}$, $R = \infty$;
(g*) Wsk. $\dfrac{1}{1+x+x^2} = \dfrac{1-x}{1-x^3} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{3n} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}$, $R = 1$;
(h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+2}$, $R = \infty$.

7.15. (a) e; (b) 1; (c) $\ln 2$; (d*) $\dfrac{\pi}{4}$.

7.21. (a) 6; (b) $\dfrac{20}{9}$; (c) $\dfrac{1}{4} + 2\ln\dfrac{5}{4}$; (d) 6; (e) $12 + \ln 4$; (f) $\dfrac{45}{32}$; (g*) $\dfrac{\pi}{6}\sqrt{3}$;
(h*) $1 + 6\ln\dfrac{6}{7}$; (i*) 27.

7.22*(a*) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; (b*) $\cos 1$; (c*) $\dfrac{3}{2}\sqrt[4]{e}$; (d*) $5e$.

Paragraf 8. (str. 47)

8.4. (a) $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$; (b) $2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$;

(c) $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$; (d) $\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{8}\cos 4x$;

(e) $\dfrac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}\sin nx$; (f) $\dfrac{2\pi^2}{3}+4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$.

8.7. Wszystkie szeregi są zbieżne na $(-\pi,\pi)$.

Rozdział 3.

Paragraf 1. (str. 51)

1.3. (a) 5; (b) $\sqrt{63}$.

1.5. (a) $O\left((-1,2),\sqrt{5}\right)=\left\{(x,y):\ (x+1)^2+(y-2)^2<5\right\}$,
$S\left((-1,2),\sqrt{5}\right)=\left\{(x,y):\ 0<(x+1)^2+(y-2)^2<5\right\}$;
(b) $O\left((0,4,-3),1\right)=\left\{(x,y,z):\ x^2+(y-4)^2+(z+3)^2<1\right\}$,
$S\left((0,4,-3),1\right)=\left\{(x,y,z):\ 0<x^2+(y-4)^2+(z+3)^2<1\right\}$.

1.7. (b); (c).

1.9. (a) $\left\{(x,y):\ (x+1)^2+y^2<1\right\}$; (b) $\left\{(x,y):\ y>x^2+1\right\}$;
(c) $\{(x,y,z):\ |x+y+z|<1\}$; (d) $\{(x,y,z):\ xyz>0\}$.

1.10. (a); (b); (c).

1.12. (a) $\left\{(x,y):\ x^2+y^2=1 \text{ lub } x^2+y^2=4\right\}$;
(b) $\left\{(x,y):\ y=x^2+2 \text{ lub } y=x^2-2\right\}$;
(c) $\{(x,y,z):\ x=0 \text{ lub } y=0 \text{ lub } z=0\}$; (d) $\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2=1\right\}$.

1.17. (a) $\{(0,0)\}$; (b) $\{(0,1),(0,-1)\}$; (c) $\mathbb{R}^3$; (d) $\mathbb{R}^3$.

1.13. (a); (b); (d).

1.15. (a) obszar; (b) obszar domknięty.

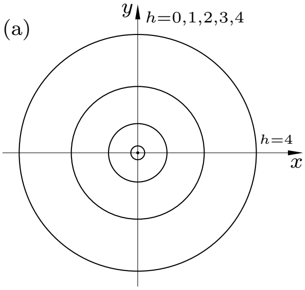
Paragraf 2. (str. 55)

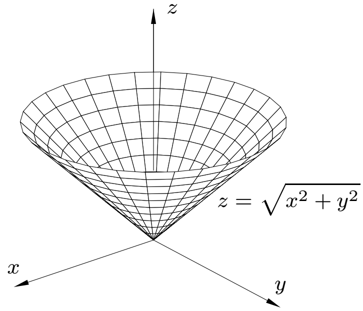
2.4. (a) $D_f=\left\{(x,y):\ x^2+y^2<1\right\}$; (b) $D_g=\left\{(x,y):\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 3\right\}$;
(c) $D_p=\{(x,y):\ x\neq 2\wedge y\neq -1\}$; (d) $D_h=\{(x,y,z):\ xyz\geqslant 0\}$;
(e) $D_k=\{(x,y,z):\ z\neq x+y\}$;
(f*) $D_q=\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi,\ \text{gdzie } n=0,1,2,\ldots\right\}$.

2.6. (a) $\left\{(x,y):\ x^2+y^2=h^2\right\}$ dla $h\geqslant 0$;

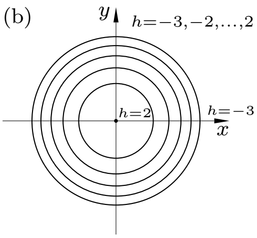
(b) $\left\{(x,y):\ x^2+y^2=2-h\right\}$ dla $h\leqslant 2$;
(c) $\left\{(x,y):\ x^2+y^2=16-h^2\right\}$ dla $0\leqslant h\leqslant 4$; (d) $\{(x,y):\ |x|+|y|=h\}$ dla $h\geqslant 0$;
(e) $\left\{(x,y):\ y=x^2+h\right\}$ dla $h\in\mathbb{R}$;
(f) $\left\{(x,y):\ y=\sqrt{9-h^2}\text{ lub }y=-\sqrt{9-h^2}\right\}$ dla $-3\leqslant h\leqslant 0$.

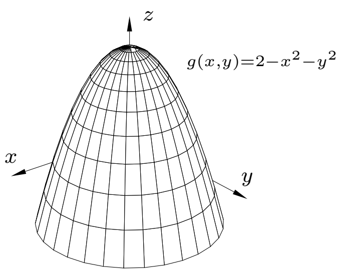
(a)



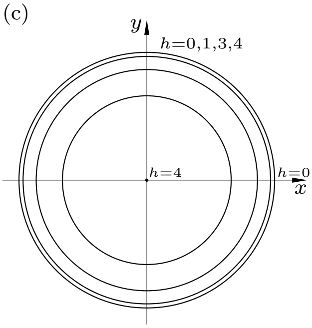


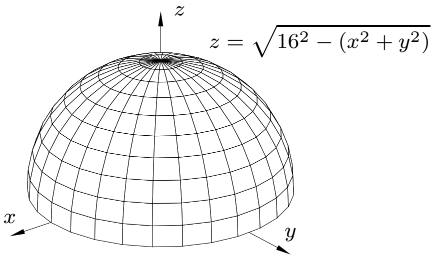
(b)



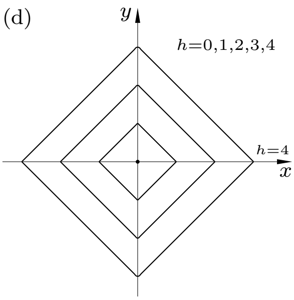


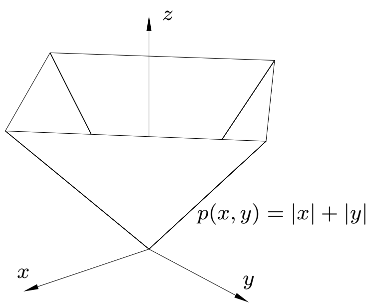
(c)



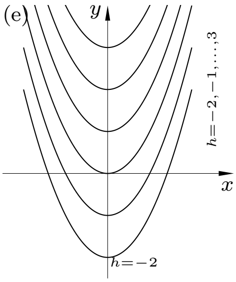


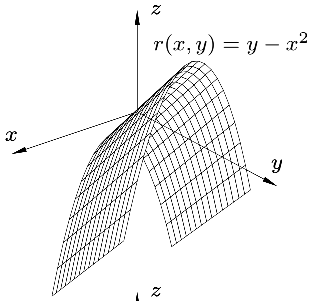
(d)



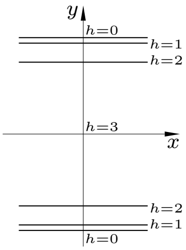


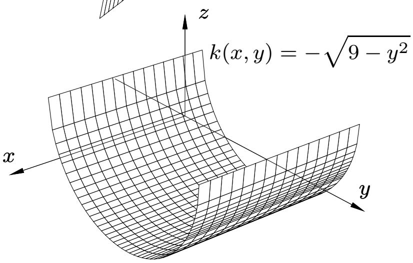
(e)





(f)

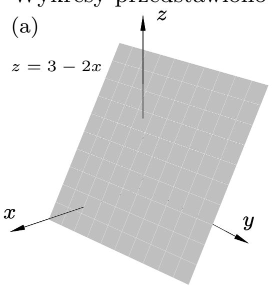




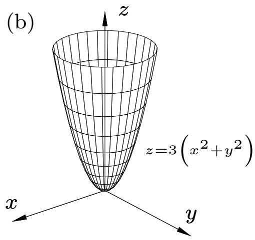
2.7. (a) wykres funkcji przesunięto o wektor $\boldsymbol{v} = (0, 0, -5)$;
(b) wykres funkcji przesunięto o wektor $\boldsymbol{v} = (-3, 2, 0)$;
(c) wykres funkcji odbito symetrycznie względem płaszczyzny xOy;
(d) dwukrotne zagęszczenie wzdłuż osi Ox i trzykrotne wzdłuż osi Oy;
(e) symetria względem płaszczyzny $x = 0$;
(f) punkty wykresu leżące pod płaszczyzną $z = 0$ przekształcamy symetrycznie względem niej, a punkty nie leżące pod tą płaszczyzną pozostawiamy bez zmian;
(g) czterokrotne rozciągnięcie wzdłuż osi Oz;
(h) część wykresu dla $y < 0$ usuwamy i wstawiamy w to miejsce obraz symetryczny części wykresu dla $y \geqslant 0$ względem płaszczyzny $y = 0$;
(i) fragment wykresu dla $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ najpierw odbijamy symetrycznie względem płaszczyzny $y = 0$ i następnie względem płaszczyzny $x = 0$.

2.8. Wykresy przedstawiono na rysunkach poniżej.

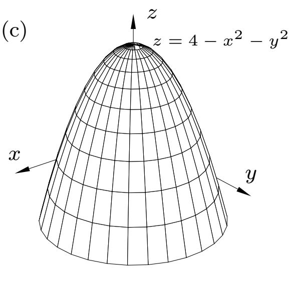
(a)



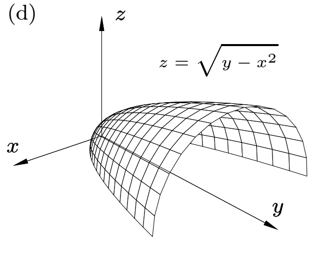
(b)



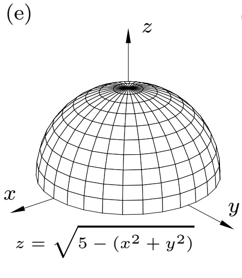
(c)



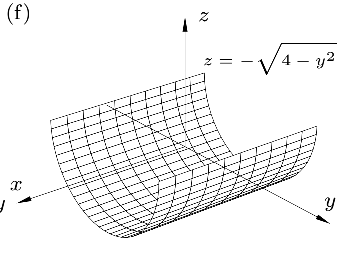
(d)



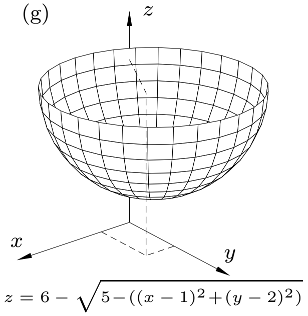
(e)



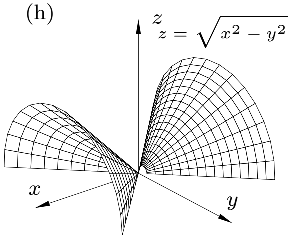
(f)



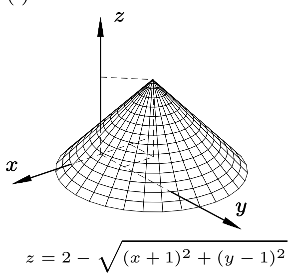
(g)



(h)



(i)



2.10. (a); (e) ograniczona; (b); (c) ograniczona z dołu; (d) nie jest ograniczona z dołu ani z góry; (f*) ograniczona. Wsk. Wykorzystać nierówność $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geqslant |ab|$.

Paragraf 3. (str. 59)

3.4. (a) $(0,0)$; (c) $(1,1,3)$.

3.7. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2x_n y_n}{x_n^2+y_n^2} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad (x_n,y_n) = (0,1/n)\,, \\ 1 & \text{dla} \quad (x_n,y_n) = (1/n,1/n)\,; \end{cases}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n+y_n}{x_n^2+y_n^2} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad (x_n,y_n) = (1/n,-1/n)\,, \\ \infty & \text{dla} \quad (x_n,y_n) = (1/n,0)\,; \end{cases}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos^2 x_n - \cos^2 y_n}{\sin^2 x_n + \sin^2 y_n} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad (x_n,y_n) = (1/n,1/n)\,, \\ 1 & \text{dla} \quad (x_n,y_n) = (0,1/n)\,; \end{cases}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^2 - y_n^2}{(x_n-1)^4 + (y_n-1)^4} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad (x_n,y_n) = (1+1/n,1+1/n)\,, \\ \infty & \text{dla} \quad (x_n,y_n) = (1+1/n,1)\,; \end{cases}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_n+y_n} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad (x_n,y_n) = (0,1/n)\,, \\ 1 & \text{dla} \quad (x_n,y_n) = (1/n,0)\,; \end{cases}$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^6}{y_n^2-1} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad (x_n,y_n) = (0,1+1/n)\,, \\ \dfrac{1}{2} & \text{dla} \quad (x_n,y_n) = \left(1/\sqrt[6]{n},1+1/n\right)\,; \end{cases}$

(g*) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin x_n}{\sin y_n} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad (x_n,y_n) = (\pi-1/n,1/n) \\ 0 & \text{dla} \quad (x_n,y_n) = (\pi,1/n)\,; \end{cases}$

(h*) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n y_n + 12}{x_n^2+y_n^2-25} = \begin{cases} -3/8 & \text{dla} \quad (x_n,y_n) = (4+1/n,-3)\,, \\ -2/3 & \text{dla} \quad (x_n,y_n) = (4,1/n-3)\,; \end{cases}$

3.8. Nie. Wsk. Pokazać, że dla ciągu $\left(\dfrac{1}{n^2},\dfrac{1}{n}\right)$ mamy $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{n^2},\dfrac{1}{n}\right) \neq 0$.

3.12. (a) 1; (b) 5; (c) -1; (d) $-\dfrac{1}{2}$; (e) $\dfrac{3}{2}$; (f) $-\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$; (g) 3; (h) $\ln\dfrac{5}{3}$.

3.13. (a) $\dfrac{1}{2}$; (b) e; (c) 0; (d) 3; (e) -3; (f) 0; (g) 0; (h) 0; (i) 0; (j*) 0.

3.18. (a) $\mathbb{R}^2$; (b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y):\ x=0, y<0\}$; (c) $\{(x,y):\ |x| \neq |y|\} \cup \left\{\left(\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4}\right)\right\}$.

Paragraf 4. (str. 63)

4.2. (a) $f'_x(-1,1) = 1$, $f'_y(-1,1) = 1$; (b) $f'_x(0,\pi) = \pi$, $f'_y(0,\pi) = 0$;
(c) $f'_x(0,0) = 0$, $f'_y(0,0) = 0$; (d) $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$;

(e) $g'_x(0,0,0) = 1,\ g'_y(0,0,0) = 0,\ g'_z(0,0,0) = 0$;
(f) $g'_x(-2,1,0) = -\dfrac{2}{\sqrt{5}};\ g'_y(-2,1,0) = \dfrac{2}{\sqrt{5}};\ g'_z(-2,1,0) = 0$.

4.3. (a) $f'_x(0,0) = 0,\ f'_y(0,0) = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad (x_n, y_n) = (1/n, 1/n), \\ 1 & \text{dla} \quad (x_n, y_n) = (1/n, 0); \end{cases}$
(b) $f'_x(0,0) = 0,\ f'_y(0,0) = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad (x_n, y_n) = (1/n, 0) \\ \dfrac{1}{2} & \text{dla} \quad (x_n, y_n) = (1/n, 1/n). \end{cases}$

4.4. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = 0 = f(0,0)$ dla dowolnego ciągu $(x_n, y_n) \longrightarrow (0,0)$, gdy $n \to \infty$, $f'_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ nie istnieje;
(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (|x_n| + |y_n - 1|) = 0 = f(0,1)$ dla dowolnego ciągu $(x_n, y_n) \longrightarrow (0,1)$, gdy $n \to \infty$, $f'_x(0,1) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ nie istnieje.

4.6. (a) $f'_x = 4x,\ f'_y = -2y$; (b) $f'_x = \ln\left(y^2+1\right),\ f'_y = \dfrac{2xy}{y^2+1}$;
(c) $f'_x = \dfrac{2x}{y},\ f'_y = -\dfrac{x^2}{y^2}$; (d) $f'_x = \dfrac{1-y^2}{(xy+1)^2},\ f'_y = \dfrac{1-x^2}{(xy+1)^2}$;
(e) $f'_x = A\left((x+y)\ln(x+y) - 1\right),\ f'_y = -A$, gdzie $A = \dfrac{e^x}{(x+y)\ln^2(x+y)}$;
(f) $f'_x = y^2 B,\ f'_y = x^2 B$, gdzie $B = \dfrac{|x+y|}{(x+y)^2\sqrt{(x+y)^2 - x^2y^2}}$;
(g) $f'_x = \sin\left[2\left(x - y^2\right)\right],\ f'_y = -2y\sin\left[2\left(x-y^2\right)\right]$;
(h) $f'_x = yx^{y-1},\ f'_y = x^y\ln x$; (i) $g'_x = y - 2x,\ g'_y = x + z,\ g'_z = y + 1$;
(j) $g'_x = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+z^3}},\ g'_y = 1,\ g'_z = -\dfrac{3z^2}{2\sqrt{x^2+z^3}}$;
(k) $g'_x = 2x\dfrac{\sin y}{\cos y - \sin z},\ g'_y = D(1 - \cos y \sin z),\ g'_z = D\sin y\cos z$,
gdzie $D = \left(\dfrac{x}{\cos y - \sin z}\right)^2$;
(l) $g'_x = E\operatorname{tg}(y\cos z),\ g'_y = E\dfrac{x\cos z}{\cos^2(y\cos z)},\ g'_z = E\dfrac{-yx\sin z}{\cos^2(y\cos z)}$,
gdzie $E = \cos\left(x\operatorname{tg}(y\cos z)\right)$;
(m) $g'_x = F,\ g'_y = Fze^{yz},\ g'_z = Fye^{yz}$, gdzie $F = (\operatorname{arc\,tg}(x + e^{yz}))^{-\frac{2}{3}}\ \dfrac{1}{3\left(1 + (x+e^{yz})^2\right)}$;
(n*) $g'_x = y^z x^{y^z - 1},\ g'_y = x^{y^z} zy^{z-1}\ln x,\ g'_z = x^{y^z} y^z \ln x \ln y$.

4.7. (a) $f'_x = p'(x),\ f'_y = q'(y)$; (b) $f'_x = p'(x)q(y),\ f'_y = p(x)q'(y)$;
(c) $f'_x = \dfrac{p'(x)}{q(y)},\ f'_y = \dfrac{-p(x)q'(y)}{[q(y)]^2}$; (d) $f'_x = p'(x)\sin q(y),\ f'_y = p(x)q'(y)\cos q(y)$;
(e) $f'_x = \dfrac{p'(x)q(y)}{1 + [p(x)q(y)]^2},\ f'_y = \dfrac{p(x)q'(y)}{1+[p(x)q(y)]^2}$;
(f) $f'_x = q(y)p'(x)\,[p(x)]^{q(y)-1},\ f'_y = [p(x)]^{q(y)}\,q'(y)\ln p(x)$.

4.9. (a) $f''_{xx} = f''_{yx} = f''_{xy} = f''_{yy} = 0$;
(b) $f''_{xx} = 2,\ f''_{yx} = f''_{xy} = 3,\ f''_{yy} = 6y$;

(c) $f''_{xx}=6x+2y^2$, $f''_{yx}=f''_{xy}=4xy$, $f''_{yy}=2x^2-12y^2$;

(d) $f''_{xx}=\dfrac{-2y}{x^3}$, $f''_{yx}=f''_{xy}=\dfrac{y^2-x^2}{x^2y^2}$, $f''_{yy}=\dfrac{2x}{y^3}$;

(e) $f''_{xx}=-y^2\sin xy$, $f''_{yy}=-x^2\sin xy$, $f''_{xy}=f''_{yx}=\cos xy-xy\sin xy$;

(f) $f''_{xx}=f''_{yy}=-\dfrac{1}{(x-y)^2}$, $f''_{yx}=f''_{xy}=\dfrac{1}{(x-y)^2}$;

(g) $f''_{xx}=-\dfrac{y}{x^2}$, $f''_{xy}=f''_{yx}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, $f''_{yy}=-\dfrac{x}{y^2}$;

(h) $f''_{xx}=\dfrac{x|y|}{y\sqrt{(y^2-x^2)^3}}$, $f''_{yy}=\dfrac{-x\left(x^2-2y^2\right)}{y|y|\sqrt{(y^2-x^2)^3}}$, $f''_{xy}=f''_{yx}=\dfrac{-|y|}{\sqrt{(y^2-x^2)^3}}$;

(i) $g''_{xx}=2-12xy^2z^5$, $g''_{yy}=6xy-4x^3z^5$, $g''_{zz}=-40x^3y^2z^3$,
$g''_{xy}=g''_{yx}=3y^2-12x^2yz^5$, $g''_{zx}=g''_{xz}=-30x^2y^2z^4$, $g''_{zy}=g''_{yz}=-20x^3yz^4$;

(j) $g''_{xx}=-A$, $g''_{yy}=-4A$, $g''_{zz}=-9A$, $g''_{xy}=g''_{yx}=-2A$, $g''_{zx}=g''_{xz}=-3A$,
$g''_{zy}=g''_{yz}=-6A$, gdzie $A=\cos(x+2y+3z)$;

(k) $g''_{xx}=yz(yz-1)x^{yz-2}$, $g''_{yy}=z^2x^{yz}\ln^2 x$, $g''_{zz}=y^2x^{yz}\ln^2 x$,
$g''_{yx}=g''_{xy}=zx^{yz-1}(1+yz\ln x)$, $g''_{yz}=g''_{zy}=x^{yz}(yz\ln x+1)\ln x$,
$g''_{xz}=g''_{zx}=yx^{yz-1}(yz\ln x+1)$;

(l) $g''_{xx}=\dfrac{2yz(z-y)}{(x+y-z)^3}$, $g''_{yy}=\dfrac{2xz(z-x)}{(x+y-z)^3}$, $g''_{zz}=\dfrac{2xy(x+y)}{(x+y-z)^3}$,

$g''_{xy}=g''_{yx}=\dfrac{z(xy+(x-z)(y-z))}{(x+y-z)^3}$,

$g''_{zx}=g''_{xz}=\dfrac{y(-zx+(x+y)(y-z))}{(x+y-z)^3}$, $g''_{zy}=g''_{yz}=\dfrac{x\left(x^2+x(y-z)-2yz\right)}{(x+y-z)^2}$

4.12. (a) $f'''_{xxy}=ye^{xy}(2+xy)$; (b) $\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^2\partial x^2}=\dfrac{24(x-y)}{(x+y)^5}$;

(c) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}=\dfrac{\cos x\sin y\left(1+\cos^2 y\right)}{\sin^4 y}$; (d) $f'''_{xyy}=\dfrac{1}{x^4}\left(2x\cos\dfrac{y}{x}-y\sin\dfrac{y}{x}\right)$;

(e) $\dfrac{\partial^5 g}{\partial x^2\partial z\partial y^2}=48yz^3$; (f) $g''''_{xyzz}=\dfrac{-108}{(x+2y-3z)^4}$.

4.14. (a) $f''_{xy}=f''_{yx}=-\dfrac{e^{\frac{x}{y}}}{y^2}\left(\dfrac{x}{y}+1\right)$; (b) $f'''_{yyx}=f'''_{yxy}=f'''_{xyy}=-\dfrac{4}{x^3}$;

(c) $f'''_{xxy}=f'''_{xyx}=f'''_{yxx}=2\cos y$; (d) $g''_{xz}=g''_{zx}=\dfrac{-4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$;

(e) $g'''_{xyz}=g'''_{xzy}=g'''_{yzx}=g'''_{yxz}=g'''_{zxy}=g'''_{zyx}=0$.

4.15. (a) $f''_{xy}(0,0)$ nie istnieje, $f''_{yx}(0,0)=0$; (b) $f''_{xy}(0,0)=1$, $f''_{yx}(0,0)=-1$;
(c) $f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}=0$; (d) $f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)=0$.

Paragraf 5. (str. 68)

5.2. (a) $z=2x-3y+2$; (b) $z=2(x-y-1)$; (c) $z=\dfrac{1}{5}(3x+4y)$; (d) $z=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y-2)$;

(e) $z=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{4}$; (f) $z=16+32(x-2)+16\ln 2(y-4)$.

5.3. (a) $3x+2y+4z-9=0$; (b) $x+y+z=0$.

5.4. (a) $2(x-1)+32(y-2)-6(z+1)=0$; (b) $z+11=4(x-1)+12(y+2)$;
(c) $z-\frac{157}{144}=-\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{4}\right)$; (d) $\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$; (e*) $D=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{45}{16}\right)$;
(f*) płaszczyzny styczne do paraboloidy $z=x^2+y^2$ w punktach $(0,0,0)$, $\left(\frac{9}{5},\frac{3}{5},\frac{18}{5}\right)$.

5.6. (a) $df(3,-4)(\Delta x,\Delta y)=\frac{3}{5}\Delta x-\frac{4}{5}\Delta y$; (b) $dg(0,1,2)(\Delta x,\Delta y,\Delta z)=4\Delta x$.

5.8. (a) 1.02; (b) 1.53403; (c) 1.12; (d) $4\frac{7}{360}$; (e) 6.06; (f) $84\frac{3}{4}$.

5.9. (a) $\Delta V\approx -0.11\pi\,\mathrm{m}^3$; (b) $\Delta T\approx \frac{1}{300}{}^\circ\,\mathrm{C}$.

5.11. (a) $\Delta_\gamma\approx 0.072$; (b) $\Delta_P\approx 162.5\sqrt{3}+250$.

Paragraf 6. (str. 71)

6.2. (a) $F'(0)=1$; (b) $F'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$; (c) $F'(2)=\frac{3\sqrt{2}}{4}$; (d) $F'(0)=2$.

6.3. (a) $F'(t)=f'_x\cos t-f'_y\sin t$,
$F''(t)=f''_{xx}\cos^2 t-\left(f''_{xy}+f''_{yx}\right)\sin t\cos t+f''_{yy}\sin^2 t-f'_x\sin t-f'_y\cos t$,
gdzie wszystkie pochodne cząstkowe obliczone są w punkcie $(\sin t,\cos t)$;
(b) $F'(t)=g'_x+2tg'_y+3t^2g'_z$, $F''(t)=2g'_y+6tg'_z+g''_{xx}+2t\left(g''_{xy}+g''_{yx}\right)$
$+t^2\left(3g''_{xz}+4g''_{yy}+3g''_{zx}\right)+6t^3\left(g''_{yz}+g''_{zy}\right)+9t^4g''_{zz}$, gdzie wszystkie pochodne cząstkowe obliczone są w punkcie $\left(t,t^2,t^3\right)$.

6.5. (a) $F'_u(1,1)=2$, $F'_v(1,1)=6$; (b) $F'_u(\pi,1)=2$, $F'_v(\pi,1)=0$.

6.6. (a) $F'_u=\frac{ve^{\operatorname{arc\,tg}(u/v)}}{u^2+v^2}f'(x)$, $F'_v=\frac{-ue^{\operatorname{arc\,tg}(u/v)}}{u^2+v^2}f'(x)$, gdzie $x=e^{\operatorname{arc\,tg}(u/v)}$;
(b) $F'_u=f'_x\cos v+f'_y\sin v$, $F'_v=f'_x(-u\sin v)v+f'_y(u\cos v)$,
gdzie pochodne czastkowe obliczone są w punkcie $(u\cos v,u\sin v)$;
(c) $F'_v=f'_xv+f'_y+f'_z\frac{1}{v}$, $F'_u=f'_xu+f'_y+f'_z\left(\frac{-u}{v^2}\right)$,
gdzie pochodne czątkowe obliczone są w punkcie $(uv,u+v,u/v)$.

6.7. (a) $z'(x)=F'_x+F'_yy'(x)$; (b) $z'_u=F'_yy'(u)$, $z'_v=F'_xx'(v)$;
(c) $z'_u=F't'_u$, $z'_v=F't'_v$;
(d*) $z'_u=F'_xx'_u+F'_yy'_u$, $z'_v=F'_xx'_v+F'_yy'_v$,
$z''_{uu}=\left(F''_{xx}x'_u+F''_{xy}y'_u\right)x'_u+F'_xx''_{uu}+\left(F''_{yx}x'_u+F''_{yy}y'_u\right)y'_u+F'_yy''_{uu}$,
$z''_{vv}=\left(F''_{xx}x'_v+F''_{xy}y'_v\right)x'_v+F'_xx''_{vv}+\left(F''_{yx}x'_v+F''_{yy}y'_v\right)y'_v+F'_yy''_{vv}$,
$z''_{uv}=\left(F''_{xx}x'_v+F''_{xy}y'_v\right)x'_u+F'_xx''_{uv}+\left(F''_{yx}x'_v+F''_{yy}y'_v\right)y'_u+F'_yy''_{uv}$.

Paragraf 7. (str. 73)

7.2. (a) $3\sqrt{2}$; (b) 1; (c) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$; (d) $\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{3}\right)$; (e) $\sqrt{3}$.

7.5. (a) $(3,3)$; (b) $\left(-\frac{3\pi}{5},-\frac{4\pi}{5}\right)$; (c) $\left(\frac{9}{8},-12,-27\right)$.

7.9. (a) 10; (b) $\frac{1}{10\sqrt{5}}\left(2\sqrt{3}-1\right)$; (c) $\sqrt{2}$; (d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; (e) $\frac{-9+16\sqrt{3}+25\sqrt{5}}{108}$.

7.7. (a) $20(-1,0,-1)$.

Paragraf 8. (str. 76)

8.2. $d^2f = f''_{xx}\,(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}\Delta x\Delta y + f''_{yy}\,(\Delta y)^2$,
$d^3f = f'''_{xxx}\,(\Delta x)^3 + 3f'''_{xxy}\,(\Delta x)^2\,\Delta y + 3f'''_{xyy}\Delta x\,(\Delta y)^2 + f'''_{yyy}\,(\Delta y)^3$,
$d^4f = f''''_{xxxx}\,(\Delta x)^4 + 4f''''_{xxxy}\,(\Delta x)^3\Delta y + 6f''''_{xxyy}\,(\Delta x)^2(\Delta y)^2 + 4f''''_{xyyy}\Delta x\,(\Delta y)^3 + f''''_{yyyy}\,(\Delta y)^4$.

8.4. (a) $f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + R_2$, gdzie
$R_2 = \frac{1}{2}f'_{xx}(x_c,y_c)(x-x_0)^2 + f''_{xy}(x_c,y_c)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}f''_{yy}(x_c,y_c)(y-y_0)^2$;
(b) $f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) +$
$\frac{1}{2}f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}f''_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + R_3$,
gdzie $R_3 = \frac{1}{6}f'''_{xxx}(x_c,y_c)(x-x_0)^3 + \frac{1}{2}f'''_{xxy}(x_c,y_c)(x-x_0)^2(y-y_0) +$
$\frac{1}{2}f'''_{xyy}(x_c,y_c)(x-x_0)(y-y_0)^2 + \frac{1}{6}f'''_{yyy}(x_c,y_c)(y-y_0)^3$.

8.5. (a) $x^2y = 1 - 2(x+1) + (y-1) + y_c(x+1)^2 + 2x_c(x+1)(y-1)$;
(b) $x\sin y = -x(y-\pi) - \frac{1}{2}(\sin y_c)\,x\,(y-\pi)^2 - \frac{1}{6}(x_c\cos y_c)(y-\pi)^3$;
(c) $e^{x+2y} = 1 + x + 2y + \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 2y^2 + e^{x_c+2y_c}\left(\frac{1}{6}x^3 + x^2y + 2xy^2 + \frac{4}{3}y^3\right)$.

8.7. (a); (d) maksimum lokalne właściwe;
(b); (c); (e); (f);(h) minimum lokalne właściwe. (g) nie ma ekstremum;

8.8* $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+(y-3)^2+9} + \dfrac{1}{x^2+(y+3)^2+9}$.

8.10. (a) $f(0,1/n) > 0 = f(0,0)$ oraz $f(0,-1/n) < 0 = f(0,0)$;
(b) $f(1/n,0) > 0 = f(0,0)$ oraz $f(0,1/n) < 0 = f(0,0)$.

8.13. (a) $(1,-3)$ – minimum lokalne właściwe; (b) brak ekstremów;
(c) $(1,1)$ – minimum lokalne właściwe; (d) $(0,0)$ – maksimum lokalne właściwe;
(e) $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ – maksimum lokalane właściwe; (f) $(3,3)$ – minimum lokalne właściwe;
(g) $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ – minima lokalne właściwe,
$\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ – maksima lokalne właściwe;
(h) $(-2,-2)$ – minimum lokalne właściwe; (i) brak ekstremów;
(j) $(0,0)$ – minimum lokalne właściwe; (k) $(-1,0)$ – minimum lokalne właściwe;
(l) brak ekstremów.

8.15. (a*) minimum lokalne dla $(x,y,z) = (-2/3,-1/3,-1)$;
(b) minimum lokalne dla $x=y=z$;
(c) maksimum lokalne dla $(x,y,z) = \left(1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},1/\sqrt{6}\right)$;
(d) minimum lokalne dla $x=y=z$.

8.16. Składniki są jednakowe.

8.18. (a) $(0,0)$ – warunkowe maksimum lokalne;
(b) $(-1,1)$, $(1,-1)$ – warunkowe minima lokalne,
$(1,1)$, $(-1,-1)$ – warunkowe maksima lokalne;
(c) $(1,1)$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ – warunkowe minima lokalne;
(d) $(-2,-2)$, $(2,2)$ – warunkowe minima lokalne;
(e) $\left(\frac{9}{4},\frac{3}{2}\right)$ – warunkowe minimum lokalne;
(f) $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$– warunkowe minima lokalne;
(g*) $(0,-3)$, $(0,3)$, $(3,0)$, $(-3,0)$ – warunkowe maksima lokalne, $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$,
$\left(\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ – warunkowe minima lokalne;
(h*) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – warunkowe minima lokalne,
$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ – warunkowe maksima lokalne.

8.20. (a) $f(0,0)=0$ wartość najmniejsza; (b) $f\left(\frac{\pi}{3},0\right)=\frac{3}{4}$ wartość największa.

8.21. (a) $m=f(1,0)=-3$, $M=f(1,2)=17$;
(b) $m=f\left(\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$,
$M=f\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}$;
(c) $m=f(0,0)=0$, $M=f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$;
(d) $m=f\left(\frac{9}{16},\frac{3}{4}\right)=-\frac{27}{256}$, $M=f((1,0))=1$;
(e*) $m=f(-1,3)=-10$, $M=f(0,-4)=40$;
(f) $m=\sqrt{8}$ na okręgach $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, $M=4$ na okręgu $x^2+y^2=5$;
(g) $m=f\left(\pm\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right),\pm\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\right)=f\left(\pm\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right),\pm\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\right)=0$,
$M=f(2,2)=f(-2,-2)=3\sqrt{2}$.

8.23. (a) $\frac{1}{7}\sqrt{126}$; (b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; (c) $a=b=c=\sqrt[3]{V}$; (d) $x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{3}{2}$;
(e*) brzegi i dno kanału mają taki sam wymiar $\frac{20}{3}\sqrt[4]{3}\approx 8.77\,\mathrm{m}$;
(f*) $x=2$, $y=1$, $z=11$.

Paragraf 10. (str. 83)

10.3. (a) $(1,-1)$ – warunkowe maksimum lokalne, $(-1,1)$ – warunkowe minimum lokalne; (b) $(-2,3)$, $(2,-3)$ – warunkowe minima lokalne, $(3/2,4)$, $(-3/2,-4)$ – warunkowe maksima lokalne; (c) $(4,-1)$.

10.6. (a) $(-1,1,14)$ – warunkowe minimum lokalne;
(b) $(1,1,1)$ – warunkowe maksimum lokalne; (c) $(0,0,0)$.

10.9. (a) $(2,2,1)$, $(2,1,2)$, $(1,2,2)$ – minima lokalne warunkowe, $(4/3,4/3,7/3)$, $(7/3,4/3,4/3)$, $(4/3,7/3,4/3)$ – maksima lokalne warunkowe;
(b) $(2,1,1)$ – warunkowe minimum lokalne, $(-2,-1,11)$ – warunkowe maksimum lokalne; (c) $(-1,-1,1)$.

Paragraf 11. (str. 86)

11.2. (a) $y_1(x) = -\sqrt{4-x^2}$, $x \in [-2,2]$, $y_2(x) = \sqrt{4-x^2}$, $x \in [-2,2]$,
(b) $y(x) = x$ $x \in \mathbb{R}$;
(c) $y_{1k}(x) = -x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, $y_{2k}(x) = x - \frac{\pi}{2} - 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$;
(d) $y_1(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$; $y_2(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$; (e) $y(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$;
(f*) $y_1(x) = x$ dla $x > 0$ oraz dla $x, y > 1$ funkcja malejąca $y_2(x)$ o własnościach $\lim\limits_{x\to 1+} y_2(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} y_2(x) = 1$ i $y_2(e) = e$;
(g*) $y_1(x) = x$ dla $x > 0$ oraz dla $x, y < 1$ funkcja malejąca $y_2(x)$ o własnościach $\lim\limits_{x\to 1-} y_2(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0+} y_2(x) = 1$ i $y_2(1/e) = 1/e$.

11.4. (a) A nie, B tak; (b) A, B tak; (c) A, B tak.

11.5. (a) $y'(1) = -1$, $y''(1) = \frac{4}{3}$; (b) $y'(0) = -1$, $y''(0) = -2$;
(c) $y'\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{3}$, $y''\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{4}{27}$; (d) $y'(0) = -2$, $y''(0) = -4$.

11.6. (a) $y'(x) = \dfrac{2x}{1-2y}$, $y''(x) = \dfrac{2\left((1-2y)^2 + 4x^2\right)}{(1-2y)^3}$;
(b) $y'(x) = \dfrac{2x}{\cos y - 1}$, $y''(x) = \dfrac{2\left(\cos^2 y - 2\cos y + 1 + 2x^2 \sin y\right)}{(\cos y - 1)^3}$;
(c) $y'(x) = \dfrac{\left(1+y^2\right)e^x}{2y\left(1+y^2\right)-1}$, $y''(x) = \dfrac{e^x\left(1+y^2\right)^2 - 2\left(\frac{\left(1+y^2\right)e^x}{2y\left(1+y^2\right)-1}\right)^2\left(y + \left(1+y^2\right)^2\right)}{\left(2y\left(1+y^2\right)-1\right)\left(1+y^2\right)}$.

11.7. (a) $y = x - 2$; (b) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; (c) $y = -x$; (d) $y = -x + 1$.

11.9. (a) $x_0 = \frac{8}{3}\sqrt[3]{2}$ – maksimum lokalne właściwe;
(b) $x_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, – minimum lokalne właściwe, $x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ – maksimum lokalne właściwe;
(c) $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, gdy $y < 0$ – minimum lokalne właściwe, gdy $y > 0$ – maksimum lokalne właściwe, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, gdy $y < 0$ – minimum lokalne właściwe, gdy $y > 0$ – maksimum lokalne właściwe;
(d) $x_1 = 0$, gdy $y < 0$ – minimum lokalne właściwe, gdy $y > 0$ – maksimum lokalne właściwe.

Rozdział 4.

Paragraf 1. (str. 90)

1.8. (a) 18; (b) $\frac{4}{3}$; (c) 6.

1.9. (a) $\frac{1}{3}$; (b) $\sqrt{2}-1$; (c) $1-e^{-3}$; (d) $\sqrt{3}-\frac{1}{3}\left(4\sqrt{2}-1\right)$.

1.11. (a) $\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx\right)\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos y\,dy\right) - \left(\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx\right)\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin y\,dy\right) = 1$;

(b) $\left(\int\limits_{0}^{1} e^x\,dx\right)\left(\int\limits_{0}^{1} e^y\,dy\right) = (e-1)^2$;

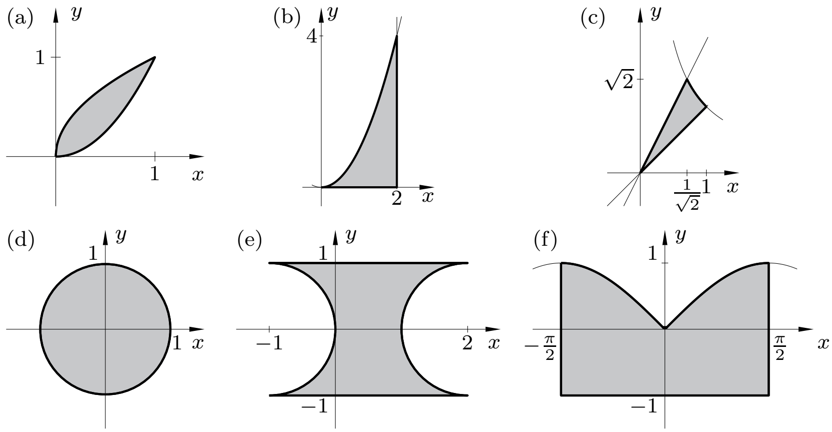
(c) $\left(\int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx\right)\left(\int\limits_{-1}^{1} y\,dy\right) + \left(\int\limits_{-1}^{1} x\,dx\right)\left(\int\limits_{-1}^{1} y^2\,dy\right) = 0$;

(d) $\left(\int\limits_{2}^{4} x\,dx\right)\cdot\left(\int\limits_{1}^{e} \ln y\,dy\right) = 6$.

Paragraf 2. (str. 93)

2.3. (a) $D=\{(x,y):\ 1\leqslant x\leqslant 2,\ x-1\leqslant y\leqslant 3-x\}$,
$D=\{(x,y):\ 0\leqslant y\leqslant 2,\ 1\leqslant x\leqslant 2-|y-1|\}$;
(b) $D=\left\{(x,y):\ -3\leqslant x\leqslant 3,\ 3-\sqrt{9-x^2}\leqslant y\leqslant 3\right\}$,
$D=\left\{(x,y):\ 0\leqslant y\leqslant 3,\ -\sqrt{9-(y-3)^2}\leqslant x\leqslant \sqrt{9-(y-3)^2}\right\}$;
(c) $D=\left\{(x,y):\ -1\leqslant x\leqslant 1,\ x\leqslant y\leqslant 3-2x^2\right\}$;
$D=\{(x,y):\ -1\leqslant y\leqslant 3,\ d(y)\leqslant x\leqslant g(y)\}$,
gdzie $d(y)=\begin{cases} -1 & \text{dla } -1\leqslant y\leqslant 1,\\ -\sqrt{\frac{3-y}{2}} & \text{dla } 1\leqslant y\leqslant 3,\end{cases}$ $\quad g(y)=\begin{cases} y & \text{dla } \ -1\leqslant y\leqslant 1,\\ \sqrt{\frac{3-y}{2}} & \text{dla } \ 1\leqslant y\leqslant 3;\end{cases}$
(d) $D=\left\{(x,y):\ -1\leqslant y\leqslant 1,\ 1-y^2\leqslant x\leqslant 2-2y^2\right\}$.

2.4. Normalny względem osi Ox : (a); (b); (c); (d); (f);
normalny względem osi Oy : (a); (b); (c); (d); (e).



2.6. (a) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{1+\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$; (b) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 dy \int\limits_y^{\frac{1}{y}} f(x,y)\,dx$; (c) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{y}}}^{\frac{1}{\sqrt{y}}} f(x,y)\,dx$;

(d) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{|x-1|}^{2-|x-1|} f(x,y)\,dy$; (e) $\int\limits_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$; (f) $\int\limits_{-1}^2 dy \int\limits_{y^2}^{y+2} f(x,y)\,dx$.

2.7. (a) $\frac{2}{3}\ln 4 - \frac{1}{3}\ln 7$; (b) 0; (c) $1 - \frac{5}{2e}$; (d) $\frac{63}{20}$; (e) $\frac{\pi^2}{8}$; (f) $e-1$; (g*) $\frac{e-1}{6}$; (h*) $\frac{\pi}{8}$; (i*) $\frac{\pi}{8}$.

Wsk. W ćwiczeniach (g*) i (h*) zmienić kolejność całkowania.

2.8. (a) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)\,dx$; (b) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}+\arccos y} f(x,y)\,dx$; (c) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$;

(d) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{e^x}^{e^2} f(x,y)\,dy$;

(e) $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} dy \int\limits_{-1}^1 f(x,y)\,dx + \int\limits_{2\sqrt{2}}^3 dy \int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx$;

(f) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 dy \int\limits_{-\log_2 y}^1 f(x,y)\,dx + \int\limits_1^4 dy \int\limits_{\log_4 y}^1 f(x,y)\,dx$.

2.9. (a) $-\frac{8}{15}$; (b) 0; (c) $\frac{112}{3}$; (d) $\frac{1}{8}$.

2.12. (a) $\frac{\sqrt{5}}{12} + \ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; (b) $\frac{5}{12}$; (c) $\frac{2}{5}\left(\sqrt{3} - \frac{7}{3}\right)$.

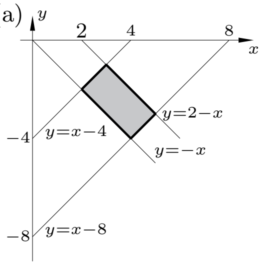
2.15. (a) $-\frac{\pi^2}{2}$; (b) $\frac{8\sqrt{2}}{3} - 4$; (c) $\frac{11}{2}$; (d) $\frac{16}{3}$.

2.17. (a) $\frac{4}{3\pi}$; (b) $\frac{8}{\pi^2}$.

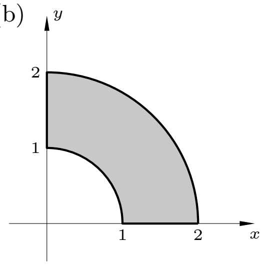
Paragraf 3. (str. 99)

3.2. Obrazy obszarów Δ przez przekształcenie $\mathcal{T}$ przedstawiono na rysunkach poniżej.

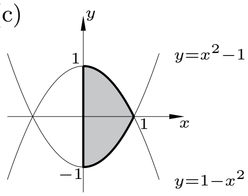
(a)



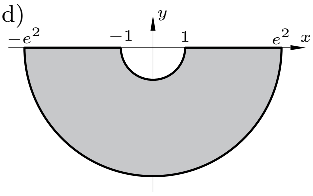
(b)



(c)



(d)



3.6. (a) Wsk. Wprowadzić zmienne $u = 2x + y$, $v = x - y$. Wtedy $2 \leqslant u \leqslant 3$, $-1 \leqslant v \leqslant 1$;
(b) Wsk. Wprowadzić zmienne $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x^2}$. Wtedy $1 \leqslant u \leqslant 2$, $1 \leqslant v \leqslant 3$;
(c) Wsk. Dokonać zamiany zmiennych $x = 2r\cos\varphi$, $y = 3r\sin\varphi$. Wtedy $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$;
(d*) Wsk. Dokonać zamiany zmiennych $x = r^2\cos^4\varphi$, $y = r^2\sin^4\varphi$. Wtedy $0 \leqslant r \leqslant 2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Paragraf 4. (str. 101)

4.4. (a) $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \varrho \leqslant r$; (b) $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $0 \leqslant \varrho \leqslant r$; (c) $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $r_1 \leqslant \varrho \leqslant r_2$;
(d) $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $r_1 \leqslant \varrho \leqslant r_2$; (e) $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varrho \leqslant 2r\sin\varphi$;
(f) $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \varrho \leqslant 2r\cos\varphi$.

4.6. (a) $\pi\left(1 - \dfrac{1}{e^2}\right)$; (b) $\pi\ln 3$; (c) $\dfrac{7}{3}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; (d) $\dfrac{\sqrt{3}}{16} + \dfrac{\pi}{24}$; (e) $\dfrac{1}{6}$; (f*) 2; (g*) $\dfrac{2\sqrt{2}}{15}$.

4.7. (a) -4π; (b) $39\pi/2$.

Paragraf 5. (str. 104)

5.1. (a) $\dfrac{9}{2}$; (b) $\dfrac{4}{3}$; (c) $\sqrt{2}$; (d) $\dfrac{1}{2}\ln 2$; (e) $\dfrac{2}{3}$; (f) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{10}$; (g) $\pi - 2$; (h*) 1.

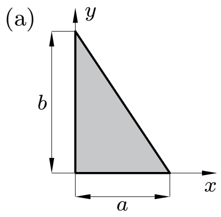
5.2. (a) $4\pi\left(27 - 16\sqrt{2}\right)/3$; (b) $125/12$; (c) 8π; (d) $432/7$; (e) 4π; (f) $\operatorname{ch}1 - 1$.

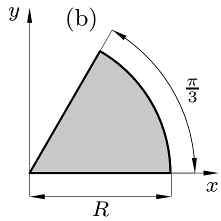
5.3. (a) 24; (b) $\sqrt{2}\pi$; (c) 8π; (d) $52\pi/3$; (e) $\pi\left(5\sqrt{5} - 1\right)/6$; (f) $3\sqrt{2}\pi$;

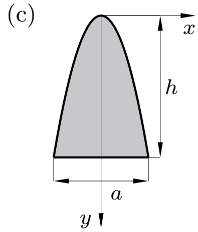
Paragraf 6. (str. 106)

6.1. (a) $2/3$; (b) $aM/2\sqrt{3}$; (c) $x_C = y_C = 4R/3\pi$; (d) $MR^2/2$.

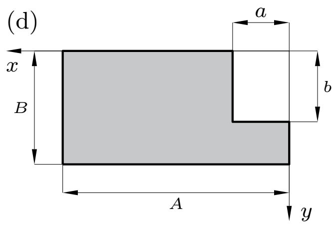
6.2. Wsk. W przykładach (d), (e), (f) wykorzystać wzór na współrzędne środka masy obszaru, który jest sumą obszarów jednorodnych D_1, D_2 o rozłącznych wnętrzach:
$$x_C = \frac{x_1 \operatorname{pole}(D_1) + x_2 \operatorname{pole}(D_2)}{\operatorname{pole}(D_1) + \operatorname{pole}(D_2)}, \quad y_C = \frac{y_1 \operatorname{pole}(D_1) + y_2 \operatorname{pole}(D_2)}{\operatorname{pole}(D_1) + \operatorname{pole}(D_2)}$$
gdzie (x_1, y_1), (x_2, y_2) są środkami mas odpowiednio obszarów D_1, D_2.

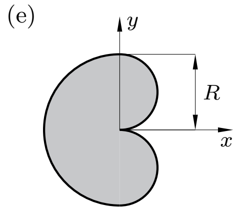


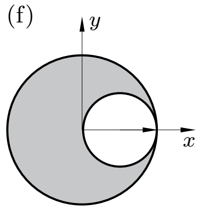




$(x_C, y_C) = \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$ $(x_C, y_C) = \left(\frac{\sqrt{3}R}{\pi}, \frac{R}{\pi}\right)$ $(x_C, y_C) = \left(0, \frac{3h}{5}\right)$







$(x_C, y_C) = \left(\frac{A^2B - a^2b}{2(AB - ab)}, \frac{AB^2 - ab^2}{2(AB - ab)}\right)$ $(x_C, y_C) = \left(-\frac{2R}{3\pi}, 0\right)$ $(x_C, y_C) = \left(-\frac{r}{3}, 0\right)$.

6.3. (a) $I = \frac{1}{12}Ma^2$; (b) $I = \frac{mR^2}{8\pi}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$; (c) $I = \frac{5}{4}Mr^2$; (d) $I = \frac{1}{4}M\left(a^2 + b^2\right)$; (e) $I = \frac{1}{60}Ma^2$; (f) $I = \frac{Ma^2(64b + 15\pi a)}{24(4b + \pi a)}$.

6.4. (a) $2\pi^2Rr^2$; (b) $\frac{a^2\sqrt{3}\pi}{2}\left(b + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$.

6.5. (a) $x_C = 0$, $y_C = \frac{4R}{3\pi}$; (b) $x_C = \frac{1}{3}a$, $y_C = \frac{1}{3}b$.

6.6. (a) $4\pi^2Rr$; (b) πrl.

6.7. (a) Środek masy leży na osi symetrii, tzn. na prostej $y = x$, zatem odległość od środka koła środka masy wynosi $\frac{2R}{\pi}$;
(b) Środek masy leży na osi symetrii $x = 0$, zatem odległość środka masy od podstawy wynosi $\frac{h\sqrt{4h^2 + a^2}}{2\left(a + \sqrt{4h^2 + a^2}\right)}$.

Rozdział 5.

Paragraf 1. (str. 110)

1.8. (a) 8; (b) $\sqrt{2}$; (c) π; (d) -2; (e) $\ln 2 \ln\frac{3}{2}\ln\frac{4}{3}$; (f) $\frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e} - 3\right)$.

1.9. (a) 34; (b) $\frac{\ln 2}{2}\ln\frac{3}{2}$; (c) $\frac{\pi + 3\sqrt{3} - 6}{12\pi}$.

1.11. (a) 0; (b) $\frac{e^2 - 1}{2}$; (c) $\frac{15}{4}$.

Paragraf 2. (str. 113)

2.3. (a) $\{(x,y,z):(x,y)\in D_{xy},\ 0\leqslant z\leqslant 4-x-y\}$, gdzie $D_{xy}=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 1\right\}$;
(b) $\left\{(x,y,z):(y,z)\in D_{yz},\ \frac{1}{4}\left(y^2+z^2\right)\leqslant x\leqslant 2\right\}$, gdzie
$D_{yz}=\left\{(y,z):\ -2\sqrt{2}\leqslant y\leqslant 2\sqrt{2},\ -\sqrt{8-y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{8-y^2}\right\}$;
(c) $\left\{(x,y,z):\ (z,x)\in D_{zx},\ 1-x\leqslant y\leqslant 1-z^2\right\}$, gdzie
$D_{zx}=\left\{(z,x):\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ -\sqrt{x}\leqslant z\leqslant\sqrt{x}\right\}$;
(d) $\{(x,y,z):\ (x,y)\in D_{xy},\ 0\leqslant z\leqslant xy\}$, gdzie
$D_{xy}=\left\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\right\}$.

2.4. (a) xOy: $\left\{(x,y,z):\ (x,y)\in D_{xy},\ -\sqrt{R^2-x^2-y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}$,
gdzie $D_{xy}=\left\{(x,y):\ -R\leqslant x\leqslant R,\ -\sqrt{R^2-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2}\right\}$,
xOz: $\left\{(x,y,z):\ (x,z)\in D_{xz},\ -\sqrt{R^2-x^2-z^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2-z^2}\right\}$,
gdzie $D_{xz}=\left\{(x,z):\ -R\leqslant x\leqslant R,\ -\sqrt{R^2-x^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-x^2}\right\}$,
yOz: $\left\{(x,y,z):\ (y,z)\in D_{yz},\ -\sqrt{R^2-y^2-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{R^2-y^2-y^2}\right\}$,
gdzie $D_{yz}=\left\{(y,z):\ -R\leqslant y\leqslant R,\ -\sqrt{R^2-y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-y^2}\right\}$,
(b) xOy: $\left\{(x,y,z):\ (x,y)\in D_{xy},\ \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant H\right\}$,
gdzie $D_{xy}=\left\{(x,y,):-H\leqslant x\leqslant H,\ -\sqrt{H-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{H-x^2}\right\}$,
xOz: $\left\{(x,y,z):\ (x,z)\in D_{xz},\ -\sqrt{z^2-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{z^2-x^2}\right\}$,
gdzie $D_{xz}=\{(x,z):\ -H\leqslant x\leqslant H,\ |x|\leqslant z\leqslant H\}$,
yOz: $\left\{(x,y,z):\ (y,z)\in D_{yz},\ -\sqrt{z^2-y^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{z^2-y^2}\right\}$,
gdzie $D_{yz}=\{(y,z):\ -H\leqslant y\leqslant H,\ |y|\leqslant z\leqslant H\}$;
(c) xOy: $\{(x,y,z):\ (x,y)\in D_{xy},\ 0\leqslant z\leqslant H\}$,
gdzie $D_{xy}=\left\{(x,y):\ -R\leqslant x\leqslant R,\ -\sqrt{R^2-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2}\right\}$,
xOz: $\left\{(x,y,z):\ (x,z)\in D_{xz},\ -\sqrt{R^2-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2}\right\}$,
gdzie $D_{xz}=\{(x,z):\ -R\leqslant x\leqslant R,\ 0\leqslant z\leqslant H\}$,
yOz: $\left\{(x,y,z):\ (y,z)\in D_{yz},\ -\sqrt{R^2-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{R^2-y^2}\right\}$,
gdzie $D_{yz}=\{(y,z):\ -R\leqslant y\leqslant R,\ 0\leqslant z\leqslant H\}$;
(d) xOy: $\left\{(x,y,z):\ (x,y)\in D_{xy},\ x^2+y^2\leqslant z\leqslant H\right\}$,
gdzie $D_{xy}=\left\{(x,y):\ -\sqrt{H}\leqslant x\leqslant\sqrt{H},\ -\sqrt{H-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{H-x^2}\right\}$,
xOz: $\left\{(x,y,z):\ (x,z)\in D_{xz},\ -\sqrt{z-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{z-x^2}\right\}$,
gdzie $D_{xz}=\left\{(x,z):\ -\sqrt{H}\leqslant x\leqslant\sqrt{H},\ x^2\leqslant z\leqslant H\right\}$,
yOz: $\left\{(x,y,z):\ (y,z)\in D_{yz},\ -\sqrt{z-y^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{z-y^2}\right\}$,
gdzie $D_{yz}=\left\{(y,z):\ -\sqrt{H}\leqslant y\leqslant\sqrt{H},\ y^2\leqslant z\leqslant H\right\}$.

2.6. (a) $\frac{1}{12}$; (b) $-\pi$; (c) $\frac{\pi}{8}$; (d) $\frac{1}{6}$; (e) $e-\frac{5}{2}$; (f) $\frac{1}{120}$.

2.7. (a) $\displaystyle\int_0^6 dx \int_0^{4-\frac{2}{3}x} dy \int_0^{3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}} f(x,y,z)\,dz$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz \int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{1} f(x,y,z)\,dy$;

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dz \int_{x^2+z^2}^{8-x^2-z^2} f(x,y,z)\,dy$;

(d) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz$.

2.8. (a) $\dfrac{162}{5}$; (b) $\dfrac{32}{105}$; (c) $\dfrac{2}{15}$; (d) $\dfrac{5\pi-6\sqrt{3}}{12}$; (e) $\dfrac{245552}{3465}$.

2.14. (a) $\dfrac{9}{2}$; (b) $\dfrac{7}{4}$.

2.15. $T_{\text{śr}} = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{3}{2}$.

Paragraf 3. (str. 117)

3.5. (a) $\dfrac{1}{2}$. Wsk. Wprowadzić zmienne $u = x$, $v = x + y$, $w = x + y + z$.
Wtedy $0 \leqslant u \leqslant 1$, $1 \leqslant v \leqslant 2$, $2 \leqslant w \leqslant 3$ oraz $|J| + 1$;
(b) $\dfrac{96\pi}{5}$. Wsk. Wprowadzić zmienne φ, ψ, ϱ określone zależnościami
$x = 6\varrho\cos\varphi\cos\psi$, $y = 3\varrho\sin\varphi\cos\psi$, $z = 2\varrho\sin\psi$ (uogólnione współrzędne sferyczne).
Wtedy $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \varrho \leqslant 1$ oraz $|J| = 36\varrho^2\cos\psi$;
(c) $\dfrac{\pi r^2 h}{2}$. Wsk. Najpierw wprowadzić zmienne $u = x - y$, $v = x + y$, $w = x + y + z$, a następnie współrzędne walcowe;
(d) $\dfrac{\pi r^2 R\left(3r^2 + 4R^2\right)}{2}$. Wsk. Wprowadzić współrzędne φ, ψ, ϱ określone zależnościami
$x = (R + \varrho\cos\psi)\cos\varphi$, $y = (R + \varrho\cos\psi)\sin\varphi$, $z = \varrho\sin\psi$.
Wtedy $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varrho \leqslant r$ oraz $|J| = \varrho\,(R + \varrho\cos\psi)$.

Paragraf 4. (str. 119)

4.3. (a) $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varrho \leqslant r$, $a \leqslant h \leqslant b$; (b) $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varrho \leqslant \dfrac{a}{k}$, $k\varrho \leqslant h \leqslant a$;
(c) $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varrho \leqslant \sqrt{\dfrac{b}{a}}$, $a\varrho^2 \leqslant h \leqslant b$;
(d) $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varrho \leqslant R$, $-\sqrt{R^2-\varrho^2} \leqslant h \leqslant \sqrt{R^2-\varrho^2}$.

4.5. (a) $\dfrac{243\pi}{4}$; (b) $\dfrac{1024\pi}{5}$; (c) $\dfrac{128\pi}{15}\left(2\sqrt{2}-1\right)$; (d) 0; (e*) $\dfrac{124\pi}{15}$; (f*) 8π.

Paragraf 5. (str. 121)

5.3. (a) $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\quad -\pi/2 \leqslant \psi \leqslant \pi/2$, $\quad 0 \leqslant \varrho \leqslant r$;

(b) $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad \arcsin(a/r) \leqslant \psi \leqslant \pi/2, \quad a/\sin\psi \leqslant \varrho \leqslant r$;

(c) $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad \operatorname{arc\,tg} k \leqslant \psi \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant a/\sin\psi$;

(d) $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2, \quad -\pi/2 \leqslant \psi \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant 2r\cos\psi\cos\varphi$;

(e) $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad -\pi/2 \leqslant \psi \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant 2r\cos\psi\sin\varphi$;

(f) $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant 2r\sin\psi$;

(g) $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant \pi/2, \quad r_1 \leqslant \varrho \leqslant r_2$;

(h) $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, \quad -\pi/2 \leqslant \psi \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant r$.

5.5. (a) $\frac{64\pi}{9}$; (b) $\pi(1-\ln 2)$; (c) $\frac{81}{10}\pi\left(8-5\sqrt{2}\right)$; (d) 24π; (e) $\frac{\pi}{10}$; (f) $\frac{4}{3}$; (g*) $\frac{64\pi}{5}$.

Paragraf 6. (str. 124)

6.1. (a) 4; (b) $\frac{128}{15}$; (c) $\frac{4}{3}$; (d) $\frac{128}{9}(3\pi-4)$; (e) $18\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; (f) 2π.

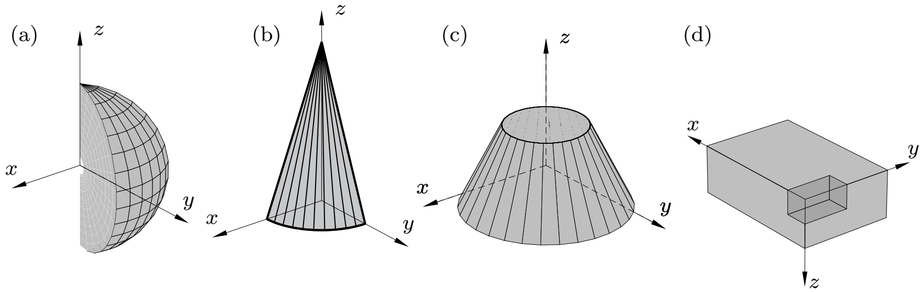
6.2. (a) $\frac{4\pi R^5}{5}$; (b) $\frac{3}{4}M$; (c) $x_C = y_C = 0,\ z_C = \frac{8}{3}$; (d) $\frac{2Mr^2}{5}$; (e) $\frac{3M}{10}\left(r^2+2H^2\right)$.

6.3. (a) $(x_C, y_C, z_C) = \left(0, 0, \frac{H\left(4r^2+rR+R^2\right)}{4\left(r^2+rR+R^2\right)}\right)$; (b) $(x_C, y_C, z_C) = \left(\frac{R}{\pi}, \frac{R}{\pi}, \frac{H}{4}\right)$;

(c) $(x_C, y_C, z_C) = \left(\frac{9R}{32}, \frac{9\sqrt{3}R}{32}, 0\right)$;

(d) $(x_C, y_C, z_C) = \left(\frac{A^2BC-a^2bc}{2(ABC-abc)}, \frac{AB^2C-ab^2c}{2(ABC-abc)}, \frac{ABC^2-abc^2}{2(ABC-abc)}\right)$.

Wsk. W przykładzie (d) wykorzystać wzór analogiczny do podanego we wskazówce do Ćwiczenia 6.2.



Literatura

1. F.Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych,* PWN, Warszawa 1977.
2. M.Mączyński, J.Muszyński, T.Traczyk, W.Żakowski, *Matematyka – podręcznik podstawowy dla WST*, T. I, II, PWN, Warszawa 1979, 1981.
3. A.Sołtysiak, *Analiza matematyczna, cz. I, II i III*, Wydawnictwo UAM, Poznań 1995 oraz 2000.
4. T.Trajdos, *Matematyka,* cz. III, WNT, Warszawa 1993.
5. W.Żakowski, W.Kołodziej, *Matematyka*, cz. II, WNT, Warszawa 1992.

Skorowidz

Skorowidz