

Analiza Matematyczna

Opracowanie: mgr Jerzy Pietraszko

Zadanie **1.**

Oblicz podaną granicę ciągu

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n^4 + 4n^2} + \frac{4}{n^4 + 4n^2} + \frac{6}{n^4 + 4n^2} + \dots + \frac{2n^2 - 4n}{n^4 + 4n^2} \right)^{3 \sin n - 2n}; n > 3$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{9n + 2} \left(1 - \frac{\ln n}{2^n} \right)^{2^{n-1}}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n+2} \left(\frac{n-2}{2n+4} \right)^{n-2}$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} 16^{n+13} \left(\frac{n}{2n+333} \right)^{4n}$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n - n^k}) \text{ w zależności od } k < 1$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right)^{\frac{\sin \frac{2}{n}}{\sin^2 \frac{1}{n}}}$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3n - \sqrt{9n^2 + n \operatorname{arctg}(n!)} \right)$$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + \operatorname{arctg} n}{n - \operatorname{arctg} n} \right)^{\ln 2^n}$$

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^{-3n} + 3^{-2n+3}} \right)^{\frac{2}{3n+4}}$$

$$(j) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \log_n 2)^{\log_4(2n)}$$

$$(k) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sin \frac{2}{n} \right)^{1 + \operatorname{ctg} \frac{1}{n}}$$

$$(l) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n^\alpha + \alpha n} - n \right) \text{ w zależności od } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(l) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} + 3^{2-n}}{(\sin n)^{2n} + (\operatorname{arctg}(n!))^{n-1}} \right)^{\frac{2}{n}}$$

$$(m) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n-13} \left(\frac{n}{2n-13} \right)^{n+1}$$

$$(n) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log_2 8^n + 2^n}{(\operatorname{tg} \frac{1}{n})^n + (\log_8 2)^n} \right)^{\frac{2}{n}}$$

Zadanie **2.**

Dla jakich wartości $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log_n \frac{n}{3} \right)^{\ln n^\alpha} < 9$?

Zadanie **3.**

Dla jakich wartości $x > 0$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{2^n + x^{1-n}} \in (2, 22)$?

Zadanie **4.**

Dla jakich wartości $a > 0$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{\frac{2^{2n} + (\operatorname{arctg}(-n))^n}{3^n + a^{\frac{n}{2}}}} < 1$?

Zadanie **5.**

Wyznacz zbiór tych wartości $\beta \in \mathbb{R}$, dla których $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - \beta}{n^2 - \beta n} \right)^{(1-n) \ln(-\beta)} < 4$.

Zadanie **6.**

Oblicz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-A}{n+A} \right)^{A^n}$ w zależności od $A \in \mathbb{R}$. Wyznacz zbiór możliwych wartości liczbowych tej granicy.

Zadanie **7.**

Dla jakich wartości $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n^\alpha} - \sqrt[3]{n^3 - \alpha n} \right) \in \mathbb{R}$, a dla jakich $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$?

Zadanie **8.**

Naszkiej wykres funkcji $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{-n} + (\sin^2 2x)^n}$; $x \in [0, \pi]$.

Zadanie **9.**

Wyznacz wszystkie wartości $\beta \in \mathbb{R}$, dla których istnieje granica właściwa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\beta \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+1} + \dots + \frac{3n}{n^2+1} \right) \right)^n.$$

Jakie wartości może przyjąć wtedy ta granica?

Zadanie **10.**

Oblicz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+2)^3 - (n+1)^3}{2(2+5+8+\dots+(3n-4))} \right)^n$. Następnie bez obliczania wskaż, ile wyniosłaby taka granica, gdyby ostatni składnik mianownika wyniósł $(3n+2)$, a ile gdyby wyniósł on $(6n-1)$.