

Matematyka – wybrane zagadnienia

Lista nr 3

Zadanie 1

Znaleźć obszary o stałym typie i sprawdzić w nich równania do postaci kanonicznej:

a) $u_{xx} - 2\cos(x)u_{yx} - (3 + \sin^2(x))u_{yy} - yu_y = 0$

b) $\sin^2(x)u_{xx} - 2y\sin(x)u_{yx} + y^2u_{yy} = 0$

c) $(1 - x^2)u_{xx} - 2xyu_{yx} - (1 + y^2)u_{yy} - 2xu_x - 2yu_y = 0$

d) $(y^2 + x^2)u_{xx} - 2u_{yx} + u_{yy} - 2xu_x - 2yu_y = 0$

Zadanie 2

Znaleźć rozwiązanie równania z podanymi warunkami brzegowymi:

a) $u_{xx} + 2u_{yx} - 3u_{yy} = 0$, $u(x,0) = 3x^2$, $u_y(x,0) = 0$

b) $x^2u_{xx} - 2xyu_{yx} - 3y^2u_{yy} = 0$ $u(x,1) = \varphi_0(x)$, $u_y(x,1) = \varphi_0(x)$

c) $(1 + x^2)u_{xx} - (1 + y^2)u_{yy} + xu_x - yu_y = 0$ $u(x,0) = \varphi_0(x)$, $u_y(x,0) = \varphi_0(x)$

Zadanie 3

Stosując metodę rozdzielania zmiennych znaleźć rozwiązania następujących zagadnień brzegowych:

a) $u_t - u_{xx} = 0$, $u_x(0,t) = 0$, $u_x(1,t) = 0$

b) $u_{xx} - 4u_{yy} = 0$, $u(x,0) = x$, $u_x(x,0) = 0$

Zadanie 4

Rozważmy równanie drgającej struny

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

z warunkami:

$$\forall t \geq 0 \quad u(0, t) = u(l, t) = 0$$

$$\forall x \in (0, l) \quad u(x, 0) = f(x)$$

$$\forall x \in (0, l) \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

Metodą Fouriera, co pokazano na wykładzie, otrzymuje się rozwiązanie o postaci:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \left(A_n \cos \frac{an\pi}{l} t + B_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right),$$

gdzie

stałe A_n oraz B_n określone są wzorami

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$B_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Wykazać, że rozwiązanie to można przekształcić do postaci:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(z) dz,$$

czyli do rozwiązania uzyskanego metodą d'Alemberta.

Zadanie 5

Znaleźć rozwiązanie $u(x, y)$ równanie Poissona

$$\Delta u = 1$$

w obszarze $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, znikające na okręgu $x^2 + y^2 = a^2$.

Wskazówka: Równanie zapisać we współrzędnych biegunowych.

Zadanie 6

Metodą rozdzielania zmiennych rozwiązać równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

z następującymi warunkami początkowymi:

$$\text{a) } u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \quad u(0, y) = \sin \pi y, \quad u(1, y) = 0$$

$$\text{b) } u(x, 0) = \cos \frac{\pi}{2} x, \quad u(x, 1) = 0, \quad u(1, y) = 0, \quad \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = 0$$

Koniec listy nr 3.