

Matematyka – wybrane zagadnienia

Lista nr 1

Zadanie 1

- a. Znaleźć zbiory, w którym równanie

$$(x^2 + y^2)u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 2xu_x = 0$$

jest typu hiperbolicznego, parabolicznego, eliptycznego.

- b. Znaleźć zbiory, w którym równanie

$$(1 - x^2)u_{xx} - 2xyu_{xy} - (1 + y^2)u_{yy} - 2xu_x - 2yu_y = 0$$

jest typu hiperbolicznego, parabolicznego, eliptycznego.

- c. Znaleźć zbiory, w którym równanie

$$u_{xx} + (2 \cos x)u_{xy} - (\sin^2 x)u_{yy} - (\sin x)u_y = 0$$

jest typu hiperbolicznego, parabolicznego, eliptycznego.

Zadanie 2

Rozwiązać następujące zagadnienia brzegowe:

a.) $u_{xx}(x, y) = 0, \quad u(0, y) = y^2, \quad u(1, y) = 1$

b.) $u_{xx}(x, y) = 6xy, \quad u(0, y) = y, \quad u(1, y) = 0$

c.) $u_{xy}(x, y) = 2x, \quad u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = x^2$

Zadanie 3

Znaleźć całkę szczególną równania

$$u - x \frac{\partial u}{\partial x} - x^2 y^2 = 0 \quad \text{w obszarze } D = \left\{ (x, y) : (x-1)^2 + y^2 < \frac{1}{4} \right\}, \text{ spełniającą}$$

warunek początkowy: $u(1, y) = -y^2$.

Wskazówka: Przyjmując y za parametr rozwiązać dane równanie jako równanie różniczkowe zwyczajne.

Zadanie 4

Znaleźć całkę ogólną równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2x} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Wskazówka. Wprowadzić nową funkcję niewiadomą $v(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$.