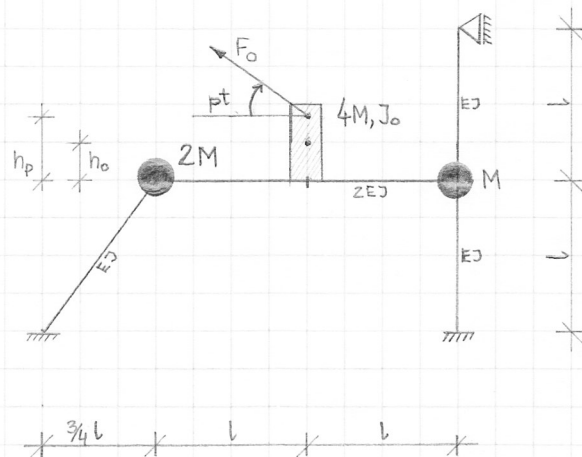


TEMAT: Dla ramy płaskiej rozwiązać zagadnienie własne oraz wyznaczyć obwiednię dynamicznych momentów gnących, wpływ tłumienia, odkształcalności osiowej i postaciowej prętów pominiąć.

Zastosować zasady analizy wymiarowej.

Dokładność obliczeń - 5 cyfr znaczących.

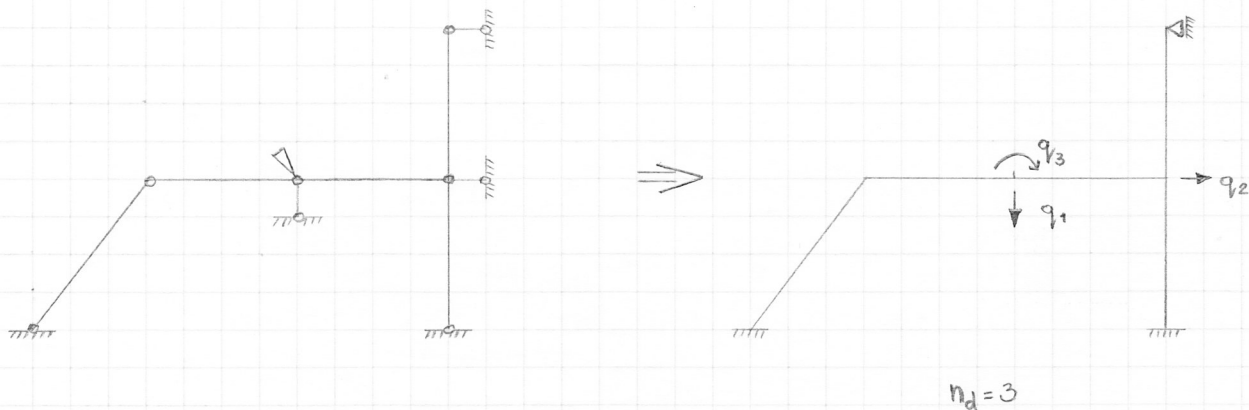


$$J_0 = 0,2 \text{ ml}^2$$

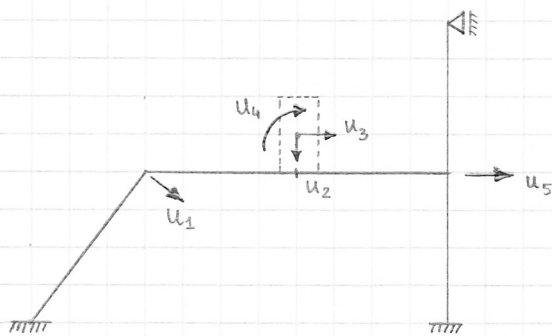
$$h_o = 0,25 \text{ l}$$

$$h_p = 0,4 \text{ l}$$

- Wielkości porównawcze : l, M, EJ, F_0
- Współrzędne uogólnione :

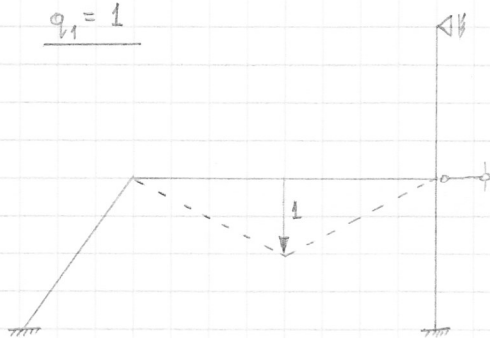


- Współrzędne lokalne :



- Wyznaczenie macierzy transformacji A_m :

$q_1 = 1$



$u_1 = 0$

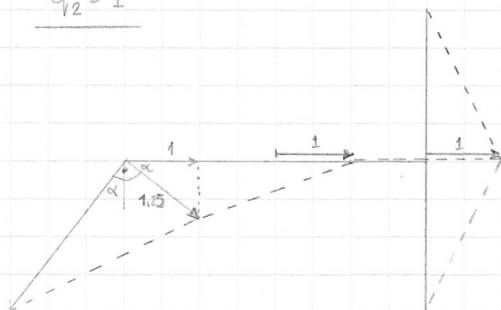
$u_2 = 1$

$u_3 = 0$

$u_4 = 0$

$u_5 = 0$

$q_2 = 1$



$u_1 = 5/4$

$u_2 = 0$

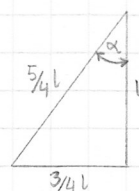
$u_3 = 1$

$u_4 = 0$

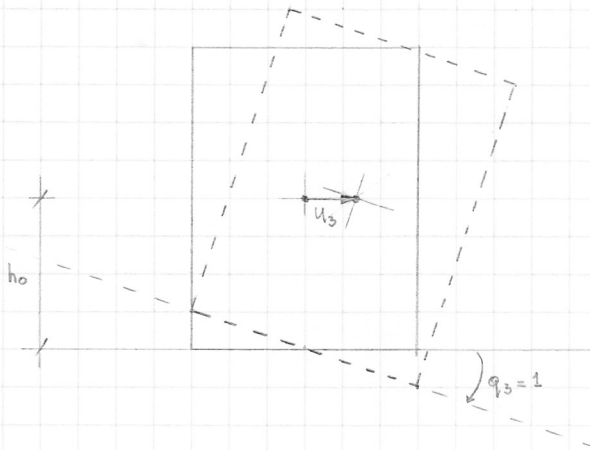
$u_5 = 1$

$\cos \alpha = \frac{l}{5/4l} = 4/5$

$\frac{1}{\cos \alpha} = 5/4$



$$q_3 = 1$$



$$u_1 = 0$$

$$u_2 = 0$$

$$u_3 = q_3 \cdot h_0 = 1 \cdot 1/4 = 1/4$$

$$u_4 = 1$$

$$u_5 = 0$$

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 5/4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Diagonalna macierz mas:

$$\{m\} = \text{diag} (2; 4; 4; 0.2; 1)$$

- Wyznaczenie macierzy bezwładności z wykorzystaniem macierzy transformacji A_m

$$B = A_m^T \cdot \{m\} \cdot A_m$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2/10 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5/4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 13/6 & 1 \\ 0 & 1 & 45/100 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8,125 & 1 \\ 0 & 1 & 0,45 \end{bmatrix}$$

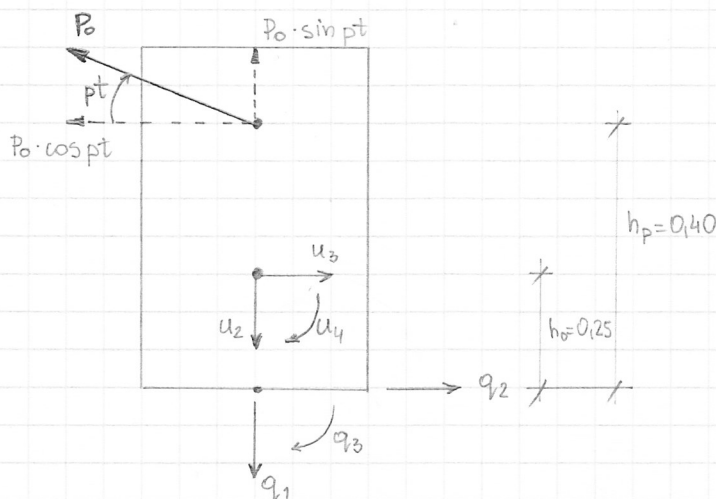
- Wyznaczenie macierzy bezwładności metodą bezpośrednią

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} (2 \cdot \dot{u}_1^2 + 4 \cdot \dot{u}_2^2 + 4 \dot{u}_3^2 + 0,2 \dot{u}_4^2 + 1 \cdot \dot{u}_5^2) = \\ &= \frac{1}{2} [2 \cdot (1,25 \dot{q}_2)^2 + 4 \cdot \dot{q}_1^2 + 4 \cdot (\dot{q}_2 + 0,25 \dot{q}_3)^2 + 0,2 \cdot \dot{q}_3^2 + 1 \cdot \dot{q}_2^2] = \\ &= \frac{1}{2} (3,125 \dot{q}_2^2 + 4 \dot{q}_1^2 + 4 \dot{q}_2^2 + 2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + 0,25 \dot{q}_3^2 + 0,2 \dot{q}_3^2 + 1 \cdot \dot{q}_2^2) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{4 \dot{q}_1^2}_{\text{matrix}} + \underbrace{8,125 \dot{q}_2^2}_{\text{matrix}} + \underbrace{0,45 \dot{q}_3^2}_{\text{matrix}} + \underbrace{1 \dot{q}_2 \dot{q}_3}_{\text{matrix}} + \underbrace{1 \dot{q}_3 \dot{q}_2}_{\text{matrix}} \right) \end{aligned}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8,125 & 1 \\ 0 & 1 & 0,45 \end{bmatrix}$$

- Wektor obciążeń zewnętrznych w bazie $\bar{u}$



$$L = -1 \cdot \sin pt \cdot u_2 - 1 \cdot \cos pt \cdot u_3 + \\ -1 \cdot \cos pt (h_p - h_0) \cdot u_4$$

$$\bar{F}_u = [0; -1 \cdot \sin pt; -1 \cos pt; \\ -0,15 \cos pt; 0]^T$$

- Wyznaczenie wektora obciążeń uogólnionych $\bar{F}$ z wykorzystaniem macierzy A_m

$$A_p = A_m$$

$$\bar{F} = A_p^T \cdot \bar{F}_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1,25 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0,25 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \cdot \sin pt \\ -1 \cos pt \\ -0,15 \cos pt \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \sin pt \\ -1 \cos pt \\ -0,40 \cos pt \end{bmatrix}$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \sin pt + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -0,4 \end{bmatrix} \cdot \cos pt$$

$$\bar{F}_s = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{F}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -0,4 \end{bmatrix}$$

- Wyznaczenie wektora obciążeń uogólnionych $\bar{F}$ metodą bezpośrednią

$$L = -P_0 \cdot \sin pt \cdot q_1 - P_0 \cos pt \cdot q_2 - P_0 \cos pt \cdot h_p \cdot q_3 = \bar{q}^T \cdot \bar{F}$$

stąd $\bar{F}$ j.w.

- Analiza statycznej i geometrycznej niewyznaczalności układu

$$n_h = e - 3t = 7 - 3 \cdot 1 = 4$$

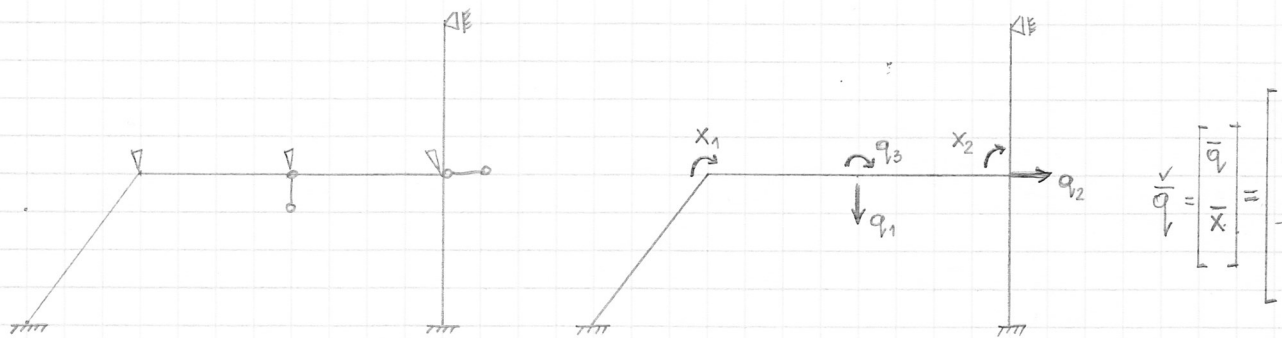
$$n_g = n_r + n_t = 3 + 2 = 5$$

$$n_{gd} = n_g - n_d = 5 - 3 = 2$$

MP prowadzi do mniejszego rozmiaru bazy poszerzonej

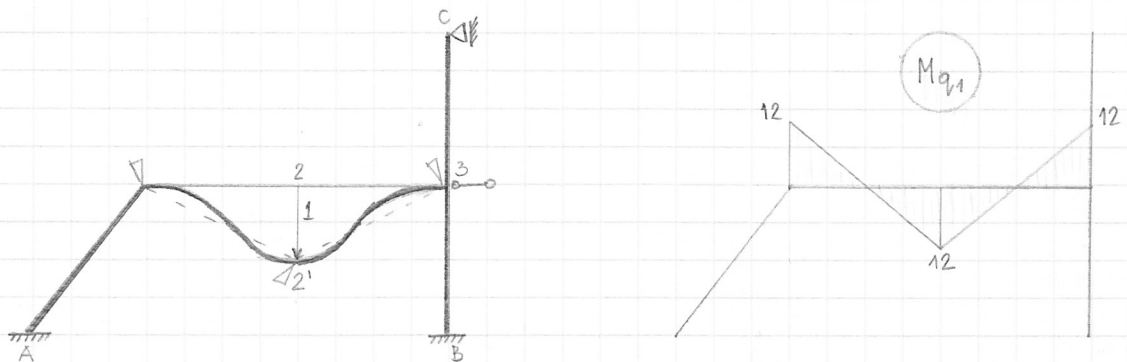
- Wyznaczenie macierzy sztywności - wariant I (premieszczenia bezwzględne).

- schemat wyjściowy i premieszczenia uogólnione



- stany jednostkowe

$$-- q_1 = 1$$

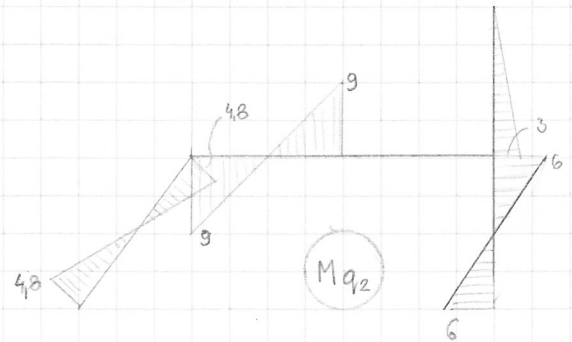
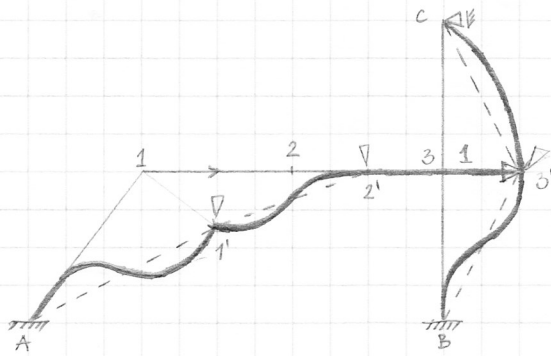


$$\psi_{12} = \frac{1}{l} = 1$$

$$\psi_{23} = -1$$

$$\frac{6 \cdot 2}{1^2} = 12$$

$$-- q_2 = 1$$

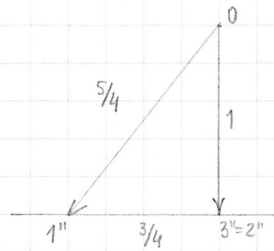


$$\psi_{A1} = \frac{5/4}{5/4 \cdot 1} = 1$$

$$\psi_{12} = \frac{-3/4}{1-1} = -3/4$$

$$\psi_{B3} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\psi_{C3} = -1$$



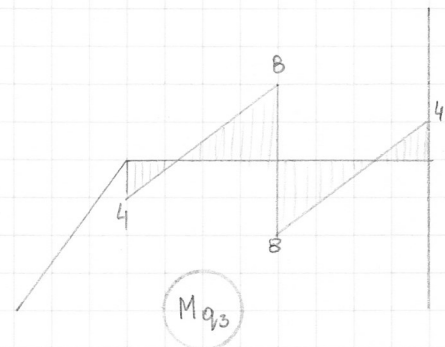
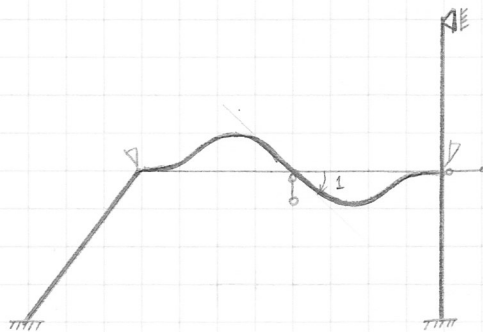
$$M_{12} = \frac{6 \cdot 2}{1^2} \cdot \frac{3}{4} = 9$$

$$M_{B3} = \frac{6 \cdot 1}{1^2} \cdot 1 = 6$$

$$M_{3C} = \frac{3 \cdot 1}{1^2} \cdot 1 = 3$$

$$M_{A1} = \frac{6 \cdot 1}{(\frac{5}{4})^2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{24}{5} = 4.8$$

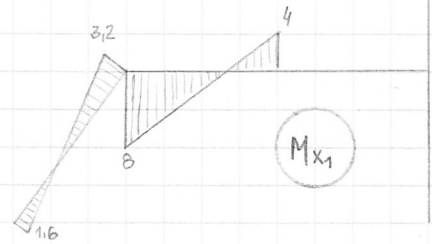
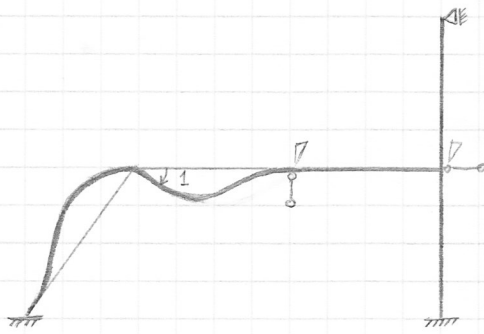
$$-- q_3 = 1$$



$$\frac{4 \cdot 2}{1} = 8$$

$$\frac{2 \cdot 2}{1} = 4$$

-- $x_1 = 1$



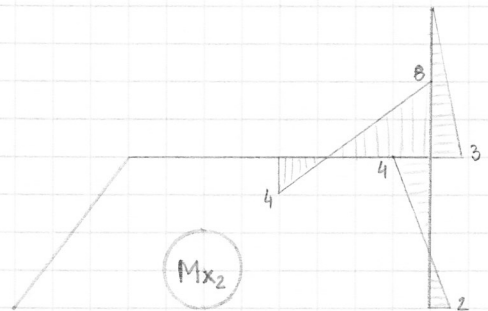
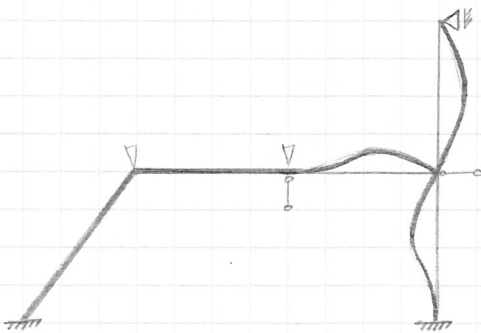
$$\frac{4 \cdot 2}{1} = 8$$

$$\frac{4 \cdot 1}{5/4} = \frac{16}{5} = 3.2$$

$$\frac{2 \cdot 2}{1} = 4$$

$$\frac{2 \cdot 1}{5/4} = \frac{8}{5} = 1.6$$

-- $x_2 = 1$



$$\frac{4 \cdot 2}{1} = 8$$

$$\frac{2 \cdot 2}{1} = 4$$

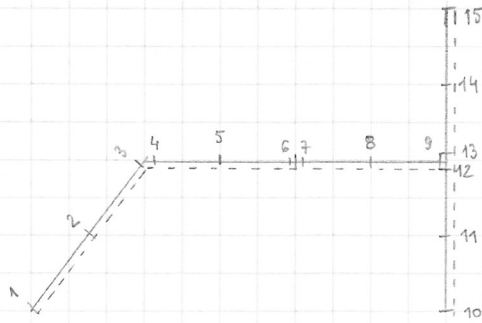
$$\frac{4 \cdot 1}{1} = 4$$

$$\frac{2 \cdot 1}{1} = 2$$

$$\frac{3 \cdot 1}{1} = 3$$

- Wariant Ia - wyznaczenie macierzy $\check{K}$, korzystając z poszerzonej macierzy wpływ

$$\check{K} = \check{M}_q^T \left\{ \frac{NL}{6EJ} \right\} \check{M}_q$$



Przekrój 15 może być pominięty, we wszystkich stanach jednostkowych $M_{15} = 0$

	M_{q1}	M_{q2}	M_{q3}	M_{x1}	M_{x2}	$\left\{ \frac{NL}{6EJ} \right\}$
1		-4,8		1,6		0,20833 5/24
2		0		-0,8		0,83333 5/6
3		4,8		-3,2		0,20833 5/24
4	-12	9	4	8		0,08333 1/12
5	0	0	-2	2		0,33333 1/3
6	12	-9	-8	-4		0,08333 1/12
7	12		8		4	0,08333 1/12
8	0		2		-2	0,33333 1/3
9	-12		-4		-8	0,08333 1/12
10		6			-2	0,16666 1/6
11		0			1	0,16666 2/3
12		-6			4	0,16666 1/6
13		-3			-3	0,16666 1/6
14		-1,5			-1,5	0,16666 2/3

$$\check{K} = \begin{bmatrix} K_{qq} & K_{qx} \\ K_{xq} & K_{xx} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 48 & -18 & 0 & -12 & 12 & \\ & 38,1 & 9 & 4,2 & -3 & \\ & & 16 & 4 & 4 & \\ \hline & & & 11,2 & 0 & \\ & & & & 15 & \end{array} \right]$$

sym

$$K = K_{qq} - K_{qx} K_{xx}^{-1} K_{xq}$$

$$K_{xx}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,029286 & 0 \\ 0 & 0,066667 \end{bmatrix}$$

$$A_{xq} = -K_{xx}^{-1} K_{xq} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0,089286 & 0 \\ 0 & 0,066667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12,0 & 4,20 & 4,0 \\ 12,0 & -3,0 & 4,0 \\ -1,0714 & 0,375 & 0,35714 \\ 0,8 & -0,2 & 0,26667 \end{bmatrix}$$

$$K_{q \times} A_{xq} = \begin{bmatrix} -12,0 & 12,0 \\ 4,20 & -3,0 \\ 4,0 & 4,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0714 & -0,375 & -0,35714 \\ -0,8 & 0,2 & -0,26667 \\ -22,457 & 6,9 & 1,0856 \end{bmatrix}$$

$$K = K_{qq} + K_{q \times} A_{xq} = \begin{bmatrix} 25,543 & -11,1 & 1,0856 \\ \text{sym.} & 35,925 & 8,3 \\ & & 13,505 \end{bmatrix}$$

• Warient I_b

$$k_{11} = k_{q_1 q_1} = - \sum_p (M_{ij} + M_{ji}) \Psi_{ij} = - [(-12-12) \cdot 1 + (12+12) \cdot (-1)] = 48$$

$$k_{12} = k_{21} = k_{q_1 q_2} = - [(-12-12) \cdot (-\frac{3}{4})] = -18$$

$$k_{13} = k_{31} = k_{q_1 q_3} = 12 - 12 = 0$$

$$k_{14} = k_{41} = k_{q_1 x_1} = -12$$

$$k_{15} = k_{51} = k_{q_1 x_2} = 12$$

$$k_{22} = k_{q_2 q_2} = - [(-4,8-4,8) \cdot 1 + (9+9) \cdot (-\frac{3}{4}) + (-6-6) \cdot 1 + (3+0) \cdot (-1)] =$$

$$= - (-9,6 - 13,5 - 12 - 3) = 38,1$$

$$k_{23} = k_{32} = k_{q_2 q_3} = 9$$

$$k_{24} = k_{42} = k_{q_2 x_1} = -4,8 + 9 = 4,2$$

$$k_{25} = k_{52} = k_{q_2 x_2} = 3 - 6 = -3$$

$$k_{33} = k_{q_3 q_3} = 8 + 8 = 16$$

$$k_{34} = k_{43} = k_{q_3 x_1} = 4$$

$$k_{35} = k_{53} = k_{q_3 x_2} = 4$$

$$k_{44} = k_{x_1 x_1} = 3,2 + 8 = 11,2$$

$$k_{45} = k_{54} = k_{x_1 x_2} = 0$$

$$k_{55} = k_{x_2 x_2} = 8 + 4 + 3 = 15$$

$$\overset{v}{K} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 48 & -18 & 0 & -12 & 12 \\ & 38,1 & 9 & 4,2 & -3 \\ & & 16 & 4 & 4 \\ \hline & & & 11,2 & 0 \\ & \text{sym} & & & 15 \end{array} \right]$$

otrzymano wynik identyczny jak w wariancie Ia; kondensację statyczną należy przeprowadzić jak w wariancie Ia.

- Rozwiązanie zagadnienia własnego

$$\begin{aligned} B\ddot{\bar{q}} + K\bar{q} &= \bar{0} & \ddot{\bar{q}} &= -\omega^2 \bar{q} \\ (K - \omega^2 B)\bar{q} &= \bar{0} & \omega^2 &= \lambda \\ (K - \lambda B)\bar{q} &= \bar{0} \end{aligned}$$

warunek istnienia niezerowego rozwiązania ($\bar{q} \neq \bar{0}$)

$$\det(K - \lambda B) = 0$$

wyniki obliczeń

$$\begin{aligned} \text{lambda}[1] &= 2.9285708037\text{E}+00 \\ \text{lambda}[2] &= 7.5737136202\text{E}+00 \\ \text{lambda}[3] &= 3.7028819216\text{E}+01 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{omega}[1] &= 1.7113067532\text{E}+00 \\ \text{omega}[2] &= 2.7520380848\text{E}+00 \\ \text{omega}[3] &= 6.0851309941\text{E}+00 \end{aligned}$$

- wektory własne

$\bar{w}_i$ - znajduje się po unormowaniu dowolnej kolumny macierzy

$$\text{adj}(K - \lambda_i B)$$

macierz własna W to macierz której kolumnami są kłejne wektory własne

$$W = [\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n]$$

macierz własna W :

$$\begin{aligned} w[1,1] &= 8.4318819341\text{E}-01 & w[1,2] &= 1.0000000000\text{E}+00 & w[1,3] &= 1.8748840599\text{E}-01 \\ w[2,1] &= 1.0000000000\text{E}+00 & w[2,2] &= -4.3556126474\text{E}-01 & w[2,3] &= -1.0922310573\text{E}-01 \\ w[3,1] &= -5.1587262230\text{E}-01 & w[3,2] &= -7.6201174206\text{E}-02 & w[3,3] &= 1.0000000000\text{E}+00 \end{aligned}$$

- kontrola ortogonalności wektorów własnych

$$W^T K W = \{k_0\}$$

$$W^T B W = \{b_0\}$$

macierz $W^T K W$

$k_0[1,1] = 2.9452273802E+01$
 $k_0[2,1] = -1.1393240129E-08$
 $k_0[3,1] = 6.5483618528E-11$
 $k_0[1,2] = -1.1405973055E-08$
 $k_0[2,2] = 4.2491689096E+01$
 $k_0[3,2] = -2.1827872843E-11$
 $k_0[1,3] = 7.2759576142E-11$
 $k_0[2,3] = -2.9103830457E-11$
 $k_0[3,3] = 1.2215384224E+01$

macierz $W^T B W$

$b_0[1,1] = 1.0056876127E+01$
 $b_0[2,1] = 1.5745627024E-11$
 $b_0[3,1] = 1.3642420527E-12$
 $b_0[1,2] = 1.5745627024E-11$
 $b_0[2,2] = 5.6104166628E+00$
 $b_0[3,2] = -2.2737367544E-13$
 $b_0[1,3] = 1.1368683772E-12$
 $b_0[2,3] = -1.7053025658E-13$
 $b_0[3,3] = 3.2988857009E-01$

- macierz własna w bazie poszerzonej $\sqrt{q}$

$$\bar{X}_i = -K_{xx}^{-1} K_{xq} \bar{W}_i = A_{xq} \bar{W}_i$$

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} \bar{W}_1 & \bar{W}_2 & \bar{W}_3 \\ \bar{X}_1 & \bar{X}_2 & \bar{X}_3 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3] = A_{xq} \bar{W} =$$

$$\begin{bmatrix} 9.84319 & 1.00000 & 0.018748 \\ 1.00000 & -0.43556 & -0.10922 \\ -0.51587 & -0.076201 & 1.00000 \end{bmatrix}$$

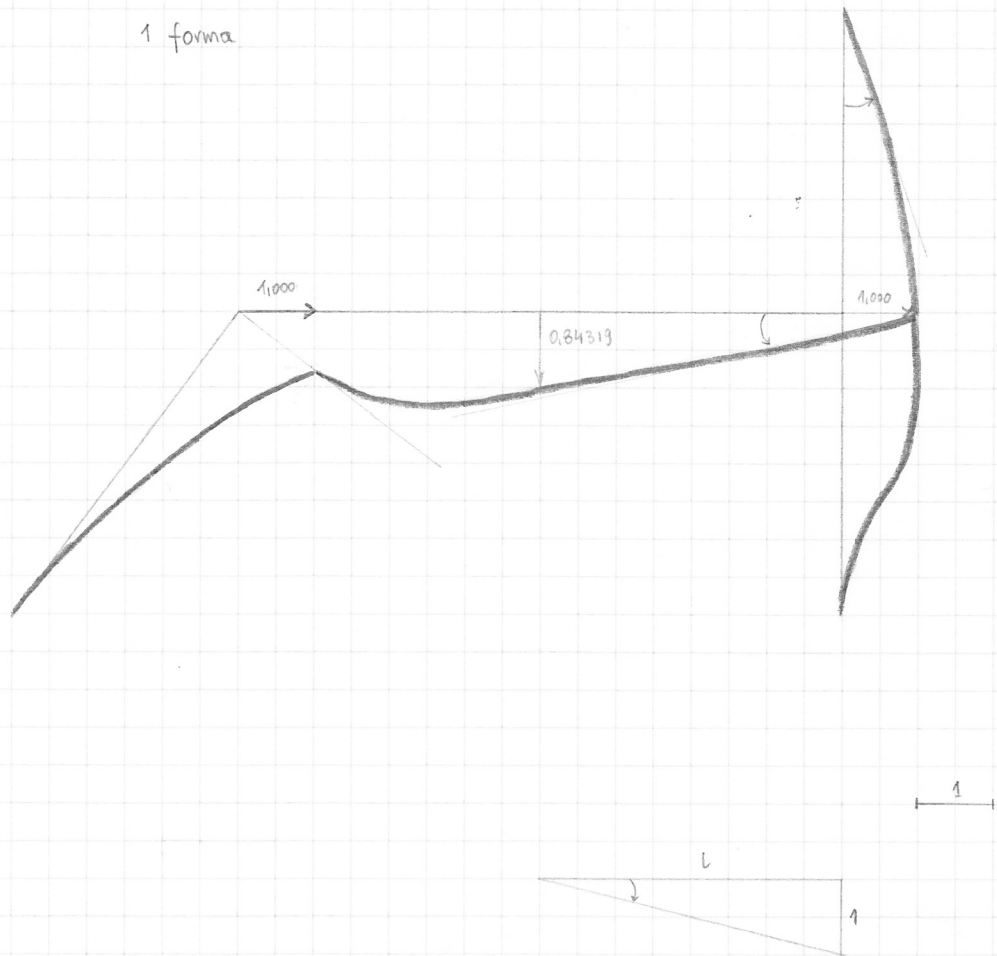
$$\begin{bmatrix} 1.0714 & -0.375 & -0.35714 \\ -0.8 & 0.2 & -0.26667 \\ 0.4 & -1.6 & 0.13333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.71263 & 1.2619 & -0.29610 \\ -0.33698 & -0.86679 & -0.30351 \\ -1.3315 & 1.0867 & 0.31558 \end{bmatrix}$$

$\vec{W} =$

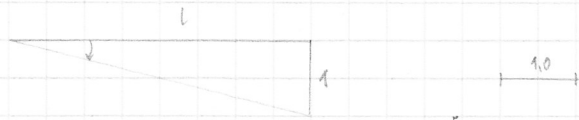
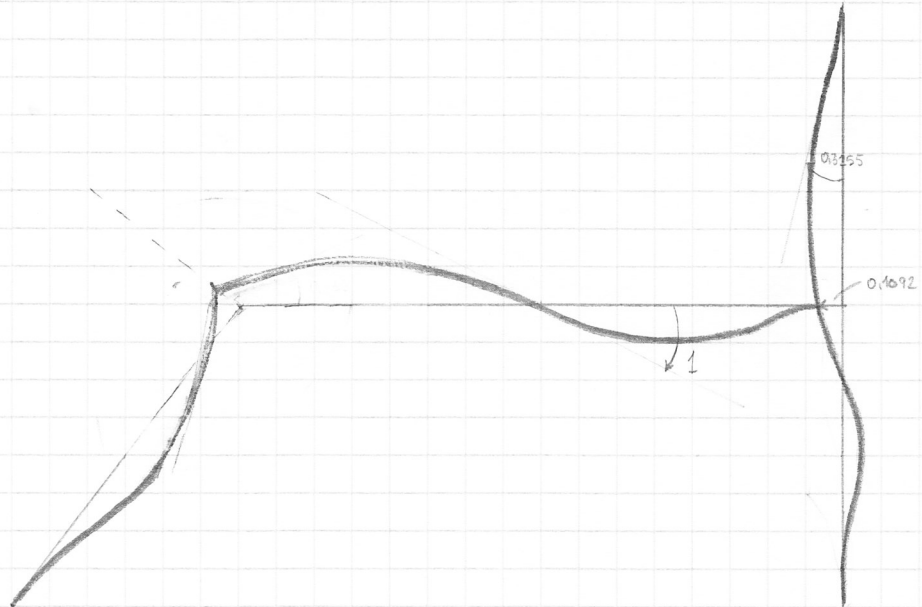
0,84319	1,0000	0,0187
1,0000	-0,43556	-0,1092
-0,51587	-0,076201	1,0000
0,71263	1,2619	-0,29610
-0,33698	-0,86679	-0,3035
-1,3315	1,0867	0,3155

- Formy uTasne

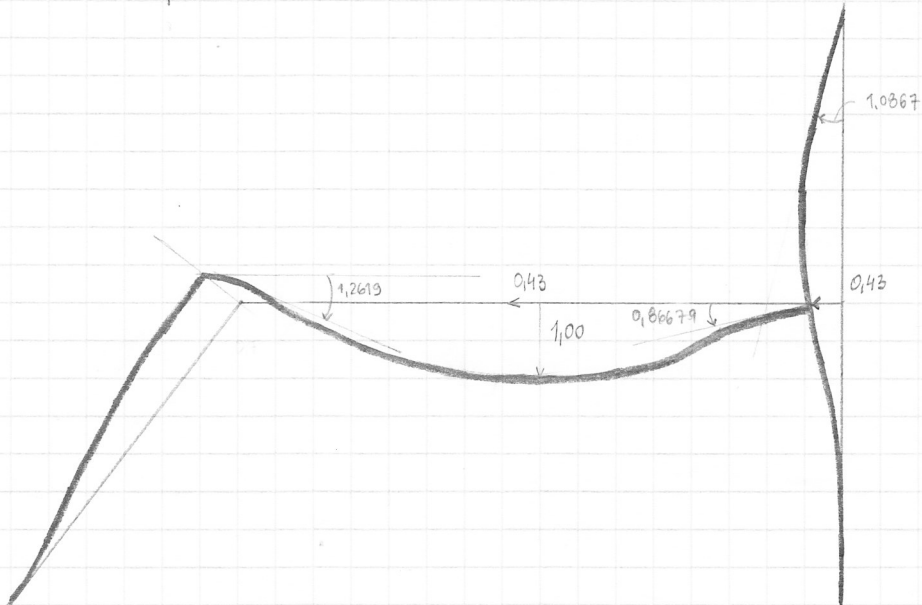
1 forma



3 forma



2 forma



- Drgania wymuszone harmoniczne

$$\text{częstość wymuszenia } p = 0,9 \omega_1 = 1,5402 \sqrt{EJ/ml^3}$$

$$B \ddot{\bar{q}} + K \bar{q} = \bar{F} \quad \ddot{\bar{q}} = -p^2 \bar{q}$$

$$(K - p^2 B) \bar{q} = \bar{F} = \bar{F}_s \cdot \sin pt + \bar{F}_c \cdot \cos pt$$

$$\bar{q} = \bar{q}_s \cdot \sin pt + \bar{q}_c \cdot \cos pt$$

$$\bar{q}_{s,c} = (K - p^2 B)^{-1} \bar{F}_{s,c}$$

czesc sinusowa

$$qs[1] = -1.6136517165E-01$$

$$qs[2] = -1.3559422630E-01$$

$$qs[3] = 7.8712625038E-02$$

czesc kosinusowa

$$qc[1] = -1.0410917628E-01$$

$$qc[2] = -1.4602312140E-01$$

$$qc[3] = 4.6523600754E-02$$

$$\bar{X}_s = A_{xq} \cdot \bar{q}_s = \begin{bmatrix} -0,15014 & 0,080979 & 0,16287 \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{X}_c = A_{xq} \cdot \bar{q}_c = \begin{bmatrix} -0,073384 & 0,041668 & 0,19817 \end{bmatrix}^T$$

$$\dot{\bar{q}}_s = \begin{bmatrix} -0,16136 \\ -0,13559 \\ 0,078712 \\ -0,15014 \\ 0,080979 \\ 0,16287 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\bar{q}}_c = \begin{bmatrix} -0,10411 \\ -0,14602 \\ 0,046523 \\ -0,073401 \\ 0,041678 \\ 0,19819 \end{bmatrix}$$